TRẦN VĂN HẠO - HOÀNG KỲ

BÀI TẬP ĐẠI SỐ

NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC VÀ TRUNG HỌC CHUYÊN NGHIỆP
HÀ NỘI - 1980

Biên tập: **Nguyễn Trọng Bá**

LỜI NÓI ĐẦU

Mục đích của cuốn sách này là cung cấp một số bài tập có hệ thống về một số vấn đề chủ yếu của đại số tuyến tính và đại số đại cương với mức độ nâng cao hơn một chút so với chương trình đại số giảng dạy ở các trường học Sư phạm và Tổng hợp. Vì những bài tập có tính chất áp dụng trực tiếp các công thức tính toán hoặc các tính chất đơn giản đã có nhiều trong những cuốn bài tập đại số đã xuất bản nên trong cuốn sách này những bài như vậy không nhiều, mỗi loại chúng tôi chỉ nêu một vài bài, mà tập trung chú ý vào những bài tổng hợp có nhiều câu nêu lên những tính chất liên quan với nhau hoặc sử dụng những công cụ giống nhau.

Trong chương I về tập hợp, ngoài những bài nhằm chủ yếu giới thiệu quan hệ (và ánh xạ) chúng tôi có nêu một số bài tập về bản số và tự số của các tập mà trong các sách bài tập hiện nay còn thiếu.

Phần đại số tuyến tính gồm bốn chương, bao gồm các khái niệm cơ bản của không gian vectơ và một số khái niệm ban đầu của lý thuyết môđun trên các vành kết hợp chứa đơn vị.

Phần đại số đại cương gồm bốn chương, trình bày các cấu trúc đại số cơ bản : nửa nhóm, nhóm, vành và trường, và một chương về đại số đa thức. Do những ứng dụng rộng rãi của lý thuyết của nhóm trong những năm gần đây nên chúng tôi thấy cần nêu những bài tập về nửa

nhóm thành một chương riêng hoàn chỉnh để bổ sung cho những cuốn bài tập đã có.

Nói chung các bài tập đều có lời giải, nhằm giúp các bạn tự học có thể kiểm tra và so sánh với những suy luận và cách giải của mình.

Vì cuốn sách suất bản lần đầu nên chắc chắn không tránh khỏi các thiếu sót trong việc lựa chọn bài tập cũng như trong cách giải, chúng tôi xin chân thành cám ơn những bạn đọc chỉ giùm các thiếu sót.

Ngày 20 tháng 11 năm 1977

Các tác giả

PHẦN ĐỀ TOÁN

CHƯƠNG I

TẬP HỢP

Để chỉ phần tử x thuộc A ta dùng ký hiệu $x \in A$, còn $x \notin A$ chỉ « x không thuộc tập A ». Tập rỗng được ký hiệu bởi φ, còn tập chỉ gồm một phần tử a sẽ được ký hiệu bởi $\{a\}$, và nói chung một tập gồm các phần tử a_1, $a_2, \ldots, a_n$ được ký hiệu bởi $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Giả sử P là một tính chất nào đó và giả sử $P(x)$ có nghĩa là phần tử x có tính chất P. Thế thì $\{x \mid P(x)\}$ là tập tất cả các phần tử x có tính chất P.

Một tập con B của một tập A được ký hiệu bởi $B \subset A$ (không loại trừ khả năng $B = A$).

Cho hai tập A và B tùy ý. *Hợp* của hai tập A và B, ký hiệu bởi $A \cup B$, là tập gồm tất cả các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập A và B. *Giao* của hai tập A và B, ký hiệu bởi $A \cap B$, là tập gồm tất cả các phần tử vừa thuộc A vừa thuộc B. *Hiệu* của các tập A và B, ký hiệu $A \setminus B$, là tập.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}.$$

Nếu $B \subset A$ thì hiệu $A \setminus B$ được gọi là tập *bù* của tập B trong tập A và được ký-hiệu bởi C_A^B, hoặc nếu tập A đã biết trước thì ta ký hiệu $A \setminus B$ bởi B' và gọi là bù của B.

Tích Đềcác của các tập A và B, ký hiệu bởi $A \times B$, là tập tất cả các cặp (a, b): $a \in A$, $b \in B$. Nếu $B = A$ thì ta ký hiệu $A \times A = A^2$. Ta định nghĩa A^n, $n = 2, 3, \ldots$, là tập tất cả các bộ $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_i \in A$, $i = 1, \ldots, n$.

Mỗi tập con α của tích Đềcác $A \times B$ được gọi là một *quan hệ* (hai ngôi) trên cặp tập A, B. Nếu $A = B$ thì $\alpha \subset A \times A$ được gọi là một quan hệ trên tập A. Các phép toán giao, hợp, bù của các quan hệ trên cặp tập A, B ta sẽ hiểu là các phép toán trên các tập con của tích Đềcác $A \times B$.

Quan hệ ngược α^{-1} của quan hệ $\alpha \subset A \times B$ được định nghĩa như sau: $\alpha^{-1} \subset B \times A$ và $(b, a) \in \alpha^{-1}$ khi và chỉ khi $(a, b) \in \alpha$.

Giả sử đã cho quan hệ $\alpha \subset A \times B$ và quan hệ $\beta \subset B \times C$. Tích $\alpha\beta$ được định nghĩa là quan hệ xác định trên cặp tập A, C như sau: với $a \in A$, $c \in C$, $(a, c) \in \alpha\beta$ khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ sao cho $(a, b) \in \alpha$ và $(b, c) \in \beta$.

Một quan hệ α trên cặp tập A, B được gọi là một *ánh xạ* từ A tới B nếu với mỗi $a \in A$ tồn tại một và chỉ một phần tử $b \in B$ sao cho $(a, b) \in \alpha$. Phần tử b được gọi là *ảnh* của phần tử a qua ánh xạ α, và được ký hiệu là $b = a\alpha$ hoặc $b = \alpha(a)$. Nếu $b = \alpha(a)$ thì phần tử a được gọi là một *tạo ảnh* của phần tử b. Tập tất cả các tạo ảnh của phần tử b trong tập A qua ánh xạ α được gọi là *tạo ảnh toàn phần* của phần tử b trong A.

Đôi khi người ta cũng viết ánh xạ từ A tới B dưới dạng một bảng gồm hai dòng, dòng trên viết các phần tử của tập A theo một thứ tự tùy ý nào đó, và dưới chúng viết các phần tử của tập B là ảnh của chúng.

Ánh xạ α từ A tới B được ký hiệu là $\alpha : A \to B$. Ánh xạ $\alpha : A \to B$ được gọi là một *đơn ánh* nếu với $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$ kéo theo $\alpha(a_1) \neq \alpha(a_2)$ và được gọi là một *toàn*

ánh nếu mỗi phần tử $b \in B$ có ít nhất một tạo ảnh trong A. Ánh xạ $\alpha : A \to B$ được gọi là một *song ánh* nếu α vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh. Một song ánh từ một tập A tới chính nó cũng được gọi là một *phép thế* của tập A.

Cho hai ánh xạ $\alpha : A \to B$ và $\beta : B \to C$. Ta định nghĩa *tích* của ánh xạ α với ánh xạ β là ánh xạ từ A tới C thu được bằng cách thực hiện liên tiếp ánh xạ α rồi ánh xạ β. Để cho tiện, nếu các ánh xạ α và β được viết dưới dạng các bảng (trong trường hợp đặc biệt là các phép thế) thì ta ký hiệu tích của ánh xạ α với ánh xạ β là $\alpha\beta$, còn trong các trường hợp khác ta sẽ ký hiệu tích đó là $\beta\alpha$, lúc đó với mọi $a \in A$ ta có

$$(\beta\alpha)(a) = \beta(\alpha(a)).$$

Một quan hệ α trên một tập A được gọi là một *quan hệ tương đương* nếu $\varepsilon_A \subset \alpha$, $\alpha^{-1} \subset \alpha$ và $\alpha^2 \subset \alpha$, trong đó ε_A là quan hệ đồng nhất trên A. Mỗi quan hệ tương đương α trên một tập A sẽ chia lớp tập A thành các lớp tương đương theo quan hệ α. Tập tất cả các lớp tương đương khác nhau của tập A theo quan hệ tương đương α được ký hiệu là A/α và gọi là *tập thương* của tập A theo quan hệ tương đương α. Ánh xạ $\varphi : A \to A/\alpha$ từ tập A tới tập thương A/α, đặt tương ứng mỗi phần tử $a \in A$ với lớp tương đương chứa nó được gọi là *ánh xạ chính tắc* từ A tới A/α.

Nếu $\varphi : A \to B$ là một ánh xạ từ một tập A tới một tập B thì nó xác định một quan hệ tương đương σ trên A như sau: với mọi $x, y \in A$, $(x, y) \in \sigma$ khi và chỉ khi $\varphi(x) = \varphi(y)$. Tương đương σ định nghĩa như vậy được gọi là *tương đương hạt nhân* của ánh xạ φ và cũng được ký hiệu là $\sigma = \mathrm{Ker}\varphi$.

Một quan hệ ρ trên một tập A được gọi là một *quan hệ thứ tự* trên tập A nếu $\varepsilon_A \subset \rho$, $\rho \cap \rho^{-1} \subset \varepsilon_A$ và $\rho^2 \subset \rho$. Quan hệ thứ tự thường được ký hiệu bởi $\leqslant$. Nếu $a \leqslant b$

với $a, b \in A$ thì ta nói *a bé hơn hoặc bằng b*, hay *a được chứa trong b*. Thứ tự $\leqslant$ trên một tập A được gọi là một *thứ tự toàn phần* nếu với mọi $a, b \in A$ ta có $a \leqslant b$ hoặc $b \leqslant a$, lúc đó A được gọi là một *tập sắp thứ tự toàn phần*.

Giả sử trên một tập A đã cho một thứ tự $\leqslant$; và B là một tập con của A. Phần tử $a \in A$ được gọi là một *cận trên* (cận dưới) của tập con B trong A nếu $b \leqslant a$ ($a \leqslant b$) với mọi $b \in$ B. Phần tử $a \in A$ được gọi là *phần tử lớn nhất* (phần tử bé nhất) của tập A nếu A là cận trên (cận dưới) của chính tập A. Phần tử $a \in A$ được gọi là *phần tử tối đại* (phần tử tối tiểu) của A nếu với mọi $x \in A$ từ $a \leqslant x$ suy ra $a = x$ (từ $x \leqslant a$ suy ra $x = a$).

Bổ đề Zooc. *Giả sử trên một tập A đã xác định một quan hệ thứ tự sao cho mỗi tập con sắp thứ tự toàn phần B của A (đối với thứ tự trên A) đều có cận trên. Thế thì mỗi phần tử thuộc A được chứa trong một phần tử tối đại của A.*

Một tập A được gọi là một *tập sắp thứ tự tốt* nếu trên A đã cho một quan hệ thứ tự sao cho mỗi tập con khác rỗng của tập A đều có một phần tử bé nhất. Bổ đề Zooc tương đương với tiên đề: Mọi tập khác rỗng đều có thể sắp thứ tự tốt.

Mỗi tập A ta đặt tương ứng với một đối tượng $|A|$ gọi là *lực lượng* của tập A, sao cho $|A| = |B|$ khi và chỉ khi tồn tại một song ánh từ A tới B. Lực lượng của tập A còn được gọi là *bản số* của tập A và ký hiệu là card A. Đặc biệt ta định nghĩa lực lượng của tập ϕ là số 0, còn lực lượng của tập $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ là số n. Lực lượng của tập **N** tất cả các số tự nhiên được ký hiệu là $\aleph_0$ (đọc là alép không) và được gọi là lực lượng *đếm được*, còn lực lượng của tập **R** tất cả các số thực được gọi là lực lượng *continum* và ký hiệu là $\aleph$ (alép).

Một tập sắp thứ tự toàn phần A được gọi là *đẳng cấu* với tập sắp thứ tự toàn phần B nếu tồn tại một song ánh φ từ tập A tới tập B bảo toàn các thứ tự trên A và B, nghĩa là $a \leqslant b$ trong A kéo theo $\varphi(a) \leqslant \varphi(b)$ trong B. Song ánh φ có tính chất đó được gọi là một *ánh xạ đẳng cấu* từ A tới B.

Mỗi tập sắp thứ tự toàn phần A ta đặt tương ứng với một đối tượng $o(A)$ gọi là *kiểu thứ tự* của tập A, sao cho $o(A) = o(B)$ khi và chỉ khi hai tập sắp thứ tự toàn phần A và B đẳng cấu. Kiểu thứ tự của một tập sắp thứ tự tốt A được gọi là *tự số* của tập A hay số *siêu hạn*.

Mỗi tập $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ có thể có $n!$ cách sắp thứ tự toàn phần, nhưng các tập sắp thứ tự thu được đều đẳng cấu nên có cùng một kiểu thứ tự mà ta cũng ký hiệu là n, còn tập rỗng ta quy ước có kiểu thứ tự là 0.

§1. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN CÁC TẬP

1. Giả sử A, B, C là các tập tùy ý. Chứng minh rằng:

a) $A \cap B = B \cap A$,

b) $A \cup B = B \cup A$,

c) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,

d) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,

e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

f) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

g) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$,

h) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

2. Giả sử A, B, C là các tập con của một tập M. Chứng minh rằng:

a) $M \setminus (A \cup B) = (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$,

b) $M \setminus (A \cap B) = (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$,

c) $B \subset A'$ khi và chỉ khi $A \subset B'$.

d) $B' \subset A$ khi và chỉ khi $A' \subset B$,

e) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap B') \cup (B \cap A')$,

f) $(A \setminus B)' = A' \cup (B \cap A)$.

g) $[(C \setminus A) \cap (C \setminus B)]' = A \cup B \cup C'$.

h) $[(A' \cup (A \cap B)) \cap (B' \cup (A \cap B))]' \cap C =$
$= [(A \cap C) \setminus (B \cap C)] \cup [(B \cap C) \cap (A' \cup B' \cup C')]$

3. Cho E và F là hai tập tùy ý. Chứng minh rằng:

a) $E \subset F$ khi và chỉ khi $E \cup F = F$.

b) $E \subset F$ khi và chỉ khi $E \cap F = E$.

c) $E \setminus F = E$ khi và chỉ khi $E \cap F = \phi$.

d) $E \setminus (E \setminus F) = F$ khi và chỉ khi $F \subset E$.

4. Giả sử E và F là hai tập tùy ý, A là một tập con của tập E, B là một tập con của tập F. $\mathcal{P}(E)$ là tập tất cả các tập con của tập E. Chứng minh rằng:

a) $E \subset F$ khi và chỉ khi $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.

b) $(E \times F) \setminus (A \times B) = [(E \setminus A) \times F] \cup [E \times (F \setminus B)]$.

5. Trên tập $\mathcal{P}(X)$ tất cả các tập con của một tập X ta định nghĩa một phép toán $\oplus$ như sau: với $A \subset X$, $B \subset X$,

$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Chứng minh rằng:

a) Phép toán $\oplus$ có tính kết hợp và giao hoán nghĩa là với $A \subset X$, $B \subset X$, $C \subset X$, ta có

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C); \ A \oplus B = B \oplus A.$$

b) Tồn tại một tập con E của tập X có tính chất

$$E \oplus A = A \text{ với mọi } A \subset X.$$

c) Với mỗi $A \subset X$ tồn tại $B \subset X$ sao cho:

$$A \oplus B = E.$$

6. Giả sử A là một tập có n phần tử. Tính:

a) Số các tập con của A có r phần tử, $0 \leqslant r \leqslant n$;

b) Số các phần tử của tập $\mathcal{P}(A)$.

7. Cho m và n là hai số nguyên dương tùy ý. A là tập tất cả các số nguyên là bội của n, B là tập tất cả các số nguyên là bội của m.

Tìm $A \cap B$.

8. Cho tập $B = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ mà các phần tử $A_1, A_2, ..., A_n$ là những tập. Chứng minh rằng có ít nhất một tập A_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, không chứa một tập nào trong các tập A_j còn lại.

9. Cho tập $I = \{1, 2, ..., n\}$ và họ tập $\{X_i \mid i \in I\}$. Với mỗi tập con $H \subset I$ giả sử $P_H = \bigcup_{i \in H} X_i$ và $Q_H = \bigcap_{i \in H} X_i$. Giả sử $\mathcal{G}_k$ là tập tất cả các tập con của I có k phần tử, $1 \leqslant k \leqslant n$. Chứng minh rằng:

$$\bigcup_{H \in \mathcal{G}_k} Q_H \supset \bigcap_{H \in \mathcal{G}_k} P_H \quad \text{nếu } k \leqslant \frac{n+1}{2}$$

và

$$\bigcup_{H \in \mathcal{G}_k} Q_H \subset \bigcap_{H \in \mathcal{G}_k} P_H \quad \text{nếu } k \geqslant \frac{n+1}{2}.$$

§ 2. QUAN HỆ

10. Giả sử α, β, γ là các quan hệ trên một tập A, chứng minh rằng:

a) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$,

b) $(\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}$,

c) $(\alpha^{-1})' = (\alpha')^{-1}$,

d) $(\alpha \cup \beta)^{-1} = \alpha^{-1} \cup \beta^{-1}$, $(\alpha \cap \beta)^{-1} = \alpha^{-1} \cap \beta^{-1}$,

e) $\alpha(\beta \cup \gamma) = \alpha\beta \cup \alpha\gamma$, $(\beta \cup \gamma)\alpha = \beta\alpha \cup \gamma\alpha$.

Tìm ví dụ chứng tỏ rằng các hệ thức tương tự câu (e) cho trường hợp $\cap$ là không đúng.

11. Cho N là tập các số nguyên dương, α là quan hệ $<$ và β là quan hệ $>$ thông thường trên tập N.

a) Hãy xác định các quan hệ α^2, α^3 ,..., $\alpha\beta$ và $\beta\alpha$ trên tập N.

b) Chứng tỏ rằng $\alpha\alpha^{-1} \neq \varepsilon_N$ trong đó ε_N là quan hệ đồng nhất trên tập N.

12. Giả sử α, β, γ là các quan hệ trên một tập A. Chứng minh rằng :

a) Nếu $\alpha \subset \beta$ thì $\alpha^{-1} \subset \beta^{-1}$ và

$$\alpha\gamma \subset \beta\gamma,\ \gamma\alpha \subset \gamma\beta.$$

b) Nếu $\alpha \subset \alpha^{-1}$, $\beta \subset \beta^{-1}$ và $\alpha\beta \subset \beta\alpha$ thì $\alpha\beta = \beta\alpha$.

c) Nếu $\varepsilon_A \subset \alpha$ và $\alpha\alpha^{-1} \subset \alpha$ thì $\alpha^{-1} \subset \alpha$ và $\alpha^2 \subset \alpha$.

13. Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ và các quan hệ α, β trên tập A như sau :

$$\alpha = \{(1, 2), (2, 4), (3, 1), (4, 3), (5, 6), (6, 5)\},$$
$$\beta = \{(1, 3), (2, 2), (3, 4), (4, 3), (5, 6), (6, 6)\}.$$

a) Tìm $\beta\beta^{-1}$.

b) Chứng minh rằng $\alpha\alpha^{-1}\alpha = \alpha$, $\beta\beta^{-1}\beta = \beta$.

14. Giả sử α là một quan hệ trên cặp tập A, B.

Với mỗi phần tử $a \in A$ ta ký hiệu

$$a\alpha = \{x \in B \mid (a, x) \in \alpha\}$$

và với mỗi tập con $A_1 \subset A$ ta ký hiệu

$$A_1\alpha = \{x \in B \mid (a, x) \in \alpha, a \in A_1\}.$$

Các tập dạng $a\alpha$, $a \in A$ được gọi là các *lớp ghép* của B theo quan hệ α^{-1}, còn các tập dạng $b\alpha^{-1}$, $b \in B$ được gọi là các *lớp ghép của A theo quan hệ* α.

Giả sử $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$ và

$$\alpha = \{(0, a), (0, b), (1, a), (2, b)\}.$$

Tìm các lớp ghép của A và B theo các quan hệ α và α^{-1} tương ứng.

15. Một quan hệ α trên cặp tập A, B được gọi là một *hàm kép* từ A tới B nếu $\alpha\alpha^{-1}\alpha \subset \alpha$. Chứng minh rằng :

a) Quan hệ $\alpha \subset A \times B$ là một hàm kép từ A tới B khi và chỉ khi $\alpha\alpha^{-1}\alpha = \alpha$.

b) Nếu các lớp ghép khác nhau của A theo quan hệ α hoặc các lớp ghép khác nhau của B theo quan hệ α^{-1} không giao nhau từng đôi một thì quan hệ α là một hàm kép từ A tới B.

c) Nếu quan hệ $\alpha \subset A \times B$ là hàm kép từ A tới B thì các lớp ghép khác nhau của A theo α và các lớp ghép khác nhau của B theo α^{-1} không giao nhau từng đôi một.

16. Chứng minh rằng quan hệ α trên một tập A là một quan hệ tương đương khi và chỉ khi thỏa mãn một trong các điều kiện sau :

a) $\varepsilon_A \subset \alpha$, $\alpha^{-1} = \alpha$, $\alpha^2 = \alpha$.

b) $\varepsilon_A \subset \alpha$, $\alpha\alpha^{-1} \subset \alpha$.

17. Cho tập A là tích Đềcác của tập số nguyên $\mathbf{Z}$ và tập N các số nguyên dương, $A = \mathbf{Z} \times N$. Gọi α là quan hệ trên A xác định bởi : $[(a, b), (c, d)] \in \alpha$ khi và chỉ khi $ad = bc$.

a) Chứng minh rằng α là một quan hệ tương đương.

b) Tìm tập thương A/α.

18. Cho α và β là hai quan hệ tương đương trên một tập A. Chứng minh rằng :

a) Giao $\alpha \cap \beta$ là một quan hệ tương đương trên A.

b) Hợp $\alpha \cup \beta$ là một quan hệ tương đương trên tập A khi và chỉ khi giao của một lớp tương đương bất kỳ theo quan hệ α với một lớp tương đương bất kỳ theo quan hệ β hoặc bằng $\emptyset$ hoặc trùng với một trong hai lớp tương đương đó.

19. Cho α và β là hai quan hệ tương đương trên một tập A. Chứng minh rằng :

a) Tích $\alpha\beta$ là một quan hệ tương đương trên tập A khi và chỉ khi $\alpha\beta = \beta\alpha$.

b) Tích $\alpha\beta$ chứa α và β và được chứa trong mọi quan hệ tương đương γ chứa α và β.

c) Nếu $\alpha\beta = \beta\alpha$ thì tích $\alpha\beta$ là quan hệ tương đương bé nhất chứa α và β.

20. Giả sử ρ là một quan hệ tùy ý trên một tập A. Ta ký hiệu $\rho^t = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n$ và $\rho_1 = \rho \cup \rho^{-1} \cup \varepsilon_A$. Chứng minh rằng :

a) ρ_1^t là một quan hệ tương đương trên tập A chứa ρ.

b) ρ_1^t chứa trong mọi quan hệ tương đương trên A chứa ρ (tức là ρ_1^t là quan hệ tương đương bé nhất chứa ρ). ρ_1^t được gọi là *quan hệ tương đương sinh bởi* ρ.

c) Nếu α và β là hai quan hệ tương đương trên A thì $(\alpha \cup \beta)^t$ là quan hệ bé nhất trên A chứa α và β.

21. Giả sử trên một tập A đã cho một họ $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ các quan hệ tương đương α_i. Chứng minh rằng quan hệ tương đương bé nhất trên A chứa các quan hệ α_i, $i \in I$, trùng với hợp σ của tất cả các tích có thể của một số hữu hạn α_i, $i \in I$.

22. Trên tập **R** tất cả các số thực cho quan hệ α như sau :

$$\alpha = \{(x, x) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\} \cup \{(x, x^2 + 1) \mid x \geqslant 0\}.$$

a) Chứng tỏ rằng α không phải là một quan hệ tương đương trên **R**.

b) Tìm quan hệ tương đương trên **R** sinh bởi α (xem bài tập 20).

23. Trên tập $\mathscr{H}(N)$ tất cả các tập con hữu hạn của tập N các số tự nhiên ta xác định quan hệ α như sau : với hai phần tử $A, B \in \mathscr{H}(N)$, $(A, B) \in \alpha$ khi và chỉ khi tổng các phần tử thuộc A bé hơn hoặc bằng tổng các phần tử thuộc B.

a) Chứng minh rằng α không phải là quan hệ tương đương trên $\mathscr{H}(N)$.

b) Tìm quan hệ tương đương trên $\mathscr{H}(N)$ sinh bởi α.

c) Chứng tỏ rằng mỗi lớp tương đương theo quan hệ tương đương sinh bởi α là một tập hữu hạn các phần tử của $\mathscr{H}(N)$.

24. Giả sử p_n là các quan hệ tương đương trên một tập có n phần tử. Chứng minh rằng :

$$p_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i p_i,$$

trong đó $C_n^i = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$, với qui ước $p_0 = 1$.

25. Giả sử n là một số nguyên lớn hơn 1, $A = N^n$ là tập tất cả các bộ n số tự nhiên. Trên tập A ta xác định một quan hệ $\leqslant$ như sau :

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leqslant (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

khi và chỉ khi $a_i = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ hoặc có một chỉ số i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sao cho $a_1 = b_1, \ldots, a_{i-1} = b_{i-1}, a_i < b_i$. Chứng minh rằng quan hệ $\leqslant$ đó là một quan hệ thứ tự toàn phần trên A và với quan hệ đó A là một tập sắp thứ tự tốt.

26. Giả sử trên một tập A đã cho một quan hệ thứ tự và $B \subset A$. Phần tử $a \in A$ được gọi là *cận trên đúng* (*cận dưới đúng*) của tập B và được ký hiệu là $\sup B$ ($\inf B$)

nếu với mọi $b \in B$ ta có $b \leqslant a$ ($b \geqslant a$) và nếu $b \leqslant c$ ($b \geqslant c$) với mọi $b \in B$ suy ra $a \leqslant c$ ($c \leqslant a$). Chứng minh rằng :

a) Nếu $a \leqslant b$ thì $\sup \{a, b\} = b$, $\inf \{a, b\} = a$.

b) Nếu $C \subset B \subset A$ và nếu tồn tại $\sup B$ và $\sup C$ ($\inf B$ và $\inf C$) thì $\sup C \leqslant \sup B$ ($\inf B \leqslant \inf C$).

c) Nếu $\{B_i \mid i \in I\}$ là một họ tập con của tập A, $B = \bigcup_{i \in I} B_i$ và nếu tồn tại $\sup B$ và $\sup B_i$ với mọi $i \in I$ (tồn tại $\inf B$ và $\inf B_i$) thì $\sup B = \sup \{\sup B_i \mid i \in I\}$ ($\inf B = \inf \{\inf B_i \mid i \in I\}$).

27. Giả sử A là một tập trên đó đã cho một quan hệ thứ tự $\leqslant$. Chứng minh rằng các điều kiện sau là tương đương :

(a) (Điều kiện tối tiểu). Mọi tập con khác rỗng của A chứa ít nhất một phần tử tối tiểu.

(b) (Nguyên lý quy nạp siêu hạn). Nếu mọi phần tử tối tiểu của tập A có một tính chất $\mathcal{T}$ nào đó, và nếu từ giả thiết mọi phần tử $x \in A$ mà $x < a$ đều có tính chất $\mathcal{T}$ suy ra phần tử a cũng có tính chất $\mathcal{T}$, thì mọi phần tử của tập A đều có tính chất $\mathcal{T}$.

(c) (Điều kiện ngắt đoạn của chuỗi giảm). Đối với mọi chuỗi phần tử của tập A :

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_k \geqslant \dots$$

tồn tại một chỉ số n sao cho :

$$a_n = a_{n+1} = a_{n+2} = \dots$$

28. Chứng minh rằng Bổ đề Zoóc tương đương với mỗi một trong các mệnh đề sau :

a) (Tiên đề chọn). Nếu đã cho một tập M khác rỗng thì tồn tại một ánh xạ φ từ tập $\mathcal{P}(M) \setminus \phi$ tới M đặt tương ứng mỗi tập con $A \neq \phi$ của M với một phần tử $\varphi(A)$ xác định của tập con A.

b) (Định lý Zermelo). Mọi tập đều có thể sắp thứ tự tốt.

29. Giả sử E là một tập sắp thứ tự.

a) Chứng minh rằng tồn tại các tập con $A \subset E$, $B \subset E$ sao cho $A \cap B = \phi$, $A \cup B = E$, A sắp thứ tự tốt (theo quan hệ thứ tự trong E), còn B không có phần tử bé nhất.

b) Hãy nêu ví dụ một tập sắp thứ tự E có nhiều cách phân tích thành hai tập A, B có các tính chất đó.

30. Giả sử E là một tập trên đó đã xác định một quan hệ thứ tự α. Ta gọi tập con $X \subset E$ là một *tập con tự do* của tập E nếu với mọi $a, b \in X$, $a \neq b$ thì $(a, b) \notin \alpha$ và $(b, a) \notin \alpha$. Ký hiệu $\mathcal{S}$ là tập tất cả các tập con tự do của E. Trong tập $\mathcal{S}$ ta định nghĩa quan hệ $\leqslant$ như sau : với $X, Y \in \mathcal{S}$, $X \leqslant Y$ khi và chỉ khi với mọi $x \in X$ tồn tại $y \in Y$ sao cho $(x, y) \in \alpha$. Chứng minh rằng :

a) Quan hệ $\leqslant$ là một quan hệ thứ tự trên tập $\mathcal{S}$.

b) Với $X, Y \in \mathcal{S}$ nếu $X \subset Y$ thì $X \leqslant Y$.

c) Tập $\mathcal{S}$ với quan hệ thứ tự $\leqslant$ là một tập sắp thứ tự toàn phần khi và chỉ khi tập E với quan hệ thứ tự α là một tập sắp thứ tự toàn phần.

31. Một tập sắp thứ tự A được gọi là một *dàn đầy đủ* nếu mọi tập con khác rỗng của A đều có cận trên đúng và cận dưới đúng (xem bài tập 26). Chứng minh rằng :

a) Một dàn đầy đủ A chứa phần tử bé nhất và phần tử lớn nhất.

b) Tập $\mathcal{P}(E)$ tất cả các tập con của một tập E với quan hệ thứ tự là quan hệ bao hàm là một dàn đầy đủ.

c) Tập $\mathbb{N}$ các số nguyên dương với quan hệ thứ tự là quan hệ chia hết không phải là một dàn đầy đủ.

32. Giả sử E là một tập tùy ý, $\mathcal{S}$ là tập tất cả các quan hệ tương đương xác định trên tập E. Chứng minh rằng tập $\mathcal{S}$ với quan hệ thứ tự là quan hệ bao hàm là một dàn đầy đủ.

33. Chứng minh rằng một tập sắp thứ tự A là một dàn đầy đủ khi và chỉ khi thỏa mãn một trong các điều kiện sau đây :

a) Tập A chứa phần tử lớn nhất và mọi tập con khác rỗng của A đều có cận dưới đúng.

b) Tập A chứa phần tử bé nhất và mọi tập con khác rỗng của A đều có cận trên đúng.

34. Một tập sắp thứ tự A được gọi là một *dàn* nếu mọi tập con gồm hai phần tử của A đều có cận trên đúng và cận dưới đúng trong A. Chứng minh rằng :

a) Tập N các số nguyên dương với quan hệ thứ tự là quan hệ chia hết là một dàn.

b) Mọi tập sắp thứ tự toàn phần là một dàn.

c) Một dàn chứa không quá một phần tử tối đại và không quá một phần tử tối tiểu.

§ 3. ÁNH XẠ

35. Cho các ánh xạ $f : A \to B$, $g : B \to C$ và $\varphi = gf$ là ánh xạ từ A tới C. Chứng minh rằng :

a) Nếu f và g là các đơn ánh thì φ cũng là đơn ánh.

b) Nếu f và g là các toàn ánh thì φ cũng là toàn ánh.

c) Nếu φ là một đơn ánh thì f cũng vậy.

d) Nếu φ là một toàn ánh thì g cũng vậy.

36. Cho hai tập A, B và một ánh xạ $\alpha : A \to B$. Chứng minh rằng ba mệnh đề sau là tương đương :

a) α là một song ánh từ A đến B.

b) Quan hệ ngược α^{-1} là một ánh xạ từ B tới A.

c) Tích các quan hệ α và α^{-1} thỏa mãn điều kiện

$$\alpha\alpha^{-1} = \varepsilon_A, \quad \alpha^{-1}\alpha = \varepsilon_B,$$

trong đó ε_A, ε_B là các quan hệ đồng nhất trên A và B.

37. Giả sử A, B là hai tập khác rỗng tùy ý. Chứng minh rằng có ít nhất một trong hai khả năng sau đây xảy ra :

a) Có một đơn ánh từ A tới B.

b) Có một đơn ánh từ B tới A.

38. Chứng minh rằng nếu α là một đơn ánh từ một tập A tới chính nó thì với mọi tập C, $C \subset (A \setminus \alpha(A))$, có một song ánh β từ A tới $C \cup \alpha(A)$.

39. Chứng minh rằng nếu có một đơn ánh từ một tập A tới một tập B và đồng thời có một đơn ánh từ tập B tới tập A thì sẽ tồn tại một song ánh từ A tới B.

40. Giả sử X là một tập đã cho. Với một tập con A của X ta định nghĩa một ánh xạ χ_A từ X tới tập $\mathbf{R}$ các số thực như sau :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ nếu } x \in A \\ 0, \text{ nếu } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Ánh xạ χ_A này gọi là *hàm đặc trưng* của tập con A trong X. Chứng minh rằng với các tập con A, B của tập X, ta có :

a) $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x)\,\chi_B(x)$;

b) $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\,\chi_B(x)$;

c) $\chi_{A \setminus B}(x) = \chi_A(x)\,[1 - \chi_B(x)]$.

41. Với mỗi số thực x ta ký hiệu $E(x)$ là phần nguyên của x, tức là số nguyên lớn nhất không vượt quá x. Với một số vô tỷ a đã chọn, ta lập ánh xạ f từ tập số nguyên $\mathbf{Z}$ tới đoạn $[0, 1]$ bằng cách đặt :

$f(m) = am - E(am)$, $m \in \mathbf{Z}$.

Chứng minh rằng :

a) f là một đơn ánh.

b) Nếu $f(\mathbf{Z})$ chứa các số y_1 và y_2 thì $f(\mathbf{Z})$ cũng chứa số $|y_2 - y_1|$.

c) Với mọi $\varepsilon > 0$ đoạn $[0, \varepsilon]$ chứa ít nhất một phần tử thuộc $f(\mathbf{Z})$ và do đó chứa vô số phần tử thuộc $f(\mathbf{Z})$.

Từ đó suy ra rằng có vô số số hữu tỷ p/q thỏa mãn các bất đẳng thức

$$q > 0, \left| a - \frac{p}{q} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{q}.$$

42. Giả sử E là một tập có m phần tử, F là một tập có n phần tử. Hỏi :

a) Có bao nhiêu ánh xạ từ E tới F.

b) Có bao nhiêu đơn ánh từ E tới F.

43. Giả sử $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ là một họ các tập và $X = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$. Tích Đềcác của họ $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$, ký hiệu là $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, được định nghĩa là tập các họ $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ những phần tử của X sao cho $x_\alpha \in X_\alpha$ với mọi $\alpha \in I$. Nếu các tập X_α đều bằng một tập A thì tích Đềcác của họ $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ được gọi là lũy thừa Đềcác bậc I của A và ký hiệu là A^I. Chứng minh rằng :

a) Nếu E, F là hai tập tùy ý, Hom (E, F) là tập tất cả các ánh xạ từ E tới F thì tồn tại một song ánh từ Hom (E, F) tới lũy thừa Đềcác F^E. Do đó có khi ta cũng định nghĩa F^E là tập tất cả các ánh xạ từ E tới F.

b) Nếu F chỉ có hai phần tử thì tồn tại một song ánh từ Hom (E, F) tới tập $\mathcal{P}(E)$ tất cả các tập con của E.

c) Từ đó suy ra rằng nếu E có n phần tử thì $\mathcal{P}(E)$ có 2^n phần tử.

§4. BẢN-SỐ VÀ TỰ SỐ

44. Giả sử $\alpha = |A|$ và $\beta = |B|$ là hai bản số. Ta đặt $\alpha \leqslant \beta$ nếu tồn tại một đơn ánh từ tập A tới tập B.

a) Quan hệ $\leqslant$ định nghĩa như vậy không phụ thuộc việc chọn các tập A, B và trên mọi tập các bản số quan hệ $\leqslant$ là một quan hệ thứ tự toàn phần.

b) Với mọi tập A tùy ý, $\mathcal{P}(A)$ là tập tất cả các tập con của tập A thì $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ (nghĩa là

$$|A| \leqslant |\mathcal{P}(A)| \text{ và } |A| \neq |\mathcal{P}(A)|.$$

45. Giả sử α, β là hai bản số tùy ý và $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$, $A \cap B = \phi$. Ta định nghĩa

$$\alpha + \beta = |A \cup B|, \ \alpha\beta = |A \times B|, \ \alpha^\beta = |A^B|.$$

Chứng minh rằng :

a) Phép cộng và phép nhân các bản số theo định nghĩa trên có tính chất giao hoán và kết hợp.

b) Có tính phân phối của phép nhân đối với phép cộng

c) Với các bản số α, β, γ ta có

$$(\alpha^\beta)(\alpha^\gamma) = \alpha^{\beta+\gamma}, \ (\alpha^\beta)(\gamma^\beta) = (\alpha\gamma)^\beta \ (\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$$

d) Nếu $|A| = \alpha$ thì $|\mathcal{P}(A)| = 2^\alpha$, trong đó $\mathcal{P}(A)$ là tập tất cả các tập con của tập A.

46. Một tập A được gọi là một *tập hữu hạn* nếu không tồn tại một tập con thực sự $B \underset{\neq}{\subset} A$ sao cho $|A| = |B|$.
Ngược lại tập A được gọi là một *tập vô hạn* nếu tồn tại một tập con thực sự $B \underset{\neq}{\subset} A$ sao cho $|A| = |B|$. Chứng minh rằng:

a) Tập $A = \{1, 2, ..., n\}$ các số nguyên dương từ 1 tới n, n là một số nguyên dương nào đó, là một tập hữu hạn.

b) Tập N tất cả các số tự nhiên là một tập vô hạn.

c) Mọi tập vô hạn đều có một tập con có lực lượng đếm được.

47. Chứng minh rằng :

a) Với mọi số tự nhiên $n \geqslant 1$, ta có

$$\mathcal{N}_0^n = \mathcal{N}_0 \cdot n\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}_0,$$

trong đó $\mathcal{N}_0$ là lực lượng đếm được.

b) Tập **Z** mọi số nguyên có lực lượng đếm được.

c) Tập **Q** mọi số hữu tỷ có lực lượng đếm được.

48. Bản số của một tập vô hạn được gọi là một bản số vô hạn. Chứng minh rằng nếu α là một bản số vô hạn thì :

a) $\alpha + \mathcal{N}_0 = \alpha$;

b) Với mọi số tự nhiên $n \geqslant 1$ ta có $\alpha^n = \alpha$.

c) $\alpha\beta = \alpha + \beta = \sup(\alpha, \beta)$ với mọi bản số $\beta \neq 0$.

49. Giả sử E là một tập vô hạn. Chứng minh rằng :

a) Tập $\mathcal{H}(E)$ tất cả các tập con hữu hạn của E có lực lượng bằng $|E|$.

b) Tập S tất cả các dãy hữu hạn phần tử của tập E có lực lượng bằng $|E|$.

c) Tồn tại một sự chia lớp $(X_\mu)_{\mu \in I}$ của tập E sao cho X_μ là các tập có lực lượng đếm được còn tập chỉ số I có cùng lực lượng với E.

50. Chứng minh rằng :

a) Tập mọi số thực trên đoạn $[0, 1]$ có lực lượng công-tinum $\mathcal{N}$.

b) $\mathcal{N} = 2^{\mathcal{N}_0}$

51. Giả sử A là một tập tùy ý, trên đó đã xác định một quan hệ thứ tự $\leqslant$ sao cho A là một tập sắp thứ tự tốt đối với quan hệ $\leqslant$ đó. Với phần tử $a \in A$ tập $P_a = \{x \in A \mid x \leqslant a\}$ được gọi là *đoạn* của A ứng với phần tử a.

a) Chứng minh rằng một tập sắp thứ tự tốt không thể đẳng cấu với mọi đoạn của nó.

b) Với hai tự số α, β tùy ý, $\alpha = O(A)$, $\beta = O(B)$ ta đặt $\alpha < \beta$ nếu A đẳng cấu với một đoạn của B, còn $\alpha = \beta$ nếu A đẳng cấu với B. Chứng minh rằng quan hệ $<$ thu được như vậy là một quan hệ thứ tự trên các tự số.

52. Xét quan hệ thứ tự $\leqslant$ trên các tự số định nghĩa trong câu (b) bài trên. Giả sử $W(\alpha)$ là tập tất cả các tự số bé hơn một tự số α đã cho. Chứng minh rằng :

a) Tập $W(\alpha)$ với quan hệ thứ tự $\leqslant$ là một tập sắp thứ tự tốt và có kiểu thứ tự α.

b) Đối với hai tự số α, β tùy ý xảy ra một trong ba khả năng :

$$\alpha = \beta, \ \alpha < \beta, \ \beta < \alpha.$$

c) Mọi tập $W \neq \phi$ các tự số đều chứa phần tử bé nhất.

d) Từ hai câu trên suy ra rằng mọi tập A các bản số cũng là một tập sắp thứ tự tốt.

53. Cho hai tự số α, β tùy ý. Giả sử $\alpha = O(A)$, $\beta = O(B)$ và $A \cap B = \phi$. Ta định nghĩa tổng $\alpha + \beta$ là kiểu thứ tự của hợp $A \cup B$, được sắp thứ tự như sau : nếu $a \in A$, $b \in B$ thì $a < b$, còn trên mỗi tập A, B thứ tự trùng với thứ tự đã cho trên các tập đó. Ký hiệu ω là tự số của tập N các số tự nhiên sắp thứ tự theo thứ tự tự nhiên.

Chứng minh rằng : a) $1 + \omega = \omega$.

b) $\omega \neq \omega + 1 \neq \omega + 2, ..$

54. Cho hai tự số $\alpha = O(A)$, $\beta = O(B)$. Ta định nghĩa tích $\alpha\beta$ là kiểu thứ tự của tích Đềcác $B \times A$ sắp thứ tự theo lối từ điển như sau : $(b, a) < (b_1, a_1)$ khi và chỉ khi $b < b_1$ hoặc $b = b_1$ và $a < a_1$. Chứng minh rằng :

a) $2\omega = \omega$, $\omega 2 = \omega + \omega$.

b) Nếu α, β, ξ là các tự số tùy ý sao cho $\xi < \alpha\beta$, thì tồn tại các tự số ζ, η thỏa mãn $\xi = \alpha\eta + \zeta$, $\zeta < \alpha$, $\eta \leq \beta$.

c) Nếu α, ξ là các tự số tùy ý, $\alpha > 0$ thì tồn tại các tự số ζ, η thỏa mãn

$$\xi = \alpha\eta + \zeta, \quad \zeta < \alpha.$$

CHƯƠNG II

ĐỊNH THỨC VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Định thức cấp n là tổng đại số của $n!$ hạng tử:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$$

trong đó $N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ là số nghịch thế của hoán vị $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ lấy trong tập $\{1, 2, \dots, n\}$.

Tính chất 1. *Phép chuyển vị không làm thay đổi định thức.*

Tính chất 2. *Nếu có một hàng chỉ gồm toàn số không thì định thức bằng 0.*

Tính chất 3. *Nếu đổi chỗ hai hàng cho nhau thì định thức đổi dấu.*

Tính chất 4. *Một định thức có hai hàng như nhau thì bằng 0.*

Tính chất 5. *Nếu nhân mọi phần tử của một hàng nào đó với k thì định thức nhân lên với k.*

Tính chất 6. *Một định thức có hai hàng tỷ lệ thì bằng không.*

Tính chất 7. *Nếu* $a_{ij} = b_j + c_j$ $(j = 1, ..., n)$ *thì*

$$D = D_1 + D_2,$$

trong đó các phần tử ở hàng thứ i của D_1 *là* $b_1, ... b_n$, *của* D_2 *là* $c_1, ..., c_n$, *còn các hàng khác của chúng là các hàng tương ứng của D.*

Tính chất 8. *Nếu có một hàng là tổ hợp tuyến tính của các hàng khác thì định thức bằng không.*

Tính chất 9. *Định thức không thay đổi nếu ta thêm vào một hàng nào đó một tổ hợp tuyến tính của các hàng khác.*

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÍNH ĐỊNH THỨC

1. Phương pháp khai triển. Để tính một định thứ *D* cấp *n*, ta có thể dùng công thức khai triển theo hàng *i*

$$D = \sum_{j=1} a_{ij}A_{ij},$$

trong đó A_{ij} là phần phụ đại số của phần tử a_{ij}.

Nếu sử dụng các tính chất của định thức để đưa đị thức về dạng có một hàng (cột) gồm các phần tử bằ không, trừ một phần tử, thì việc tính một định thức c *n* đưa về việc tính một định thức cấp $n - 1$, và cứ ti tục mãi đến lúc được định thức cấp hai. Tuy nhiên với các định thức mà phần tử là các chữ phương ph này rất cồng kềnh, nên tùy theo dạng của định thức mà thường sử dụng một số trong các phương pháp sau đâ

2. Phương pháp đưa về dạng tam giác. Dùng các tính chất của định thức, ta biến đổi định thức về dạng tam giác, tức là mọi phần tử nằm ở một phía của đường chéo chính đều bằng không. Khi đó, định thức sẽ bằng tích các phần tử trên đường chéo chính.

3. Phương pháp rút nhân tử chung. Định thức được coi như đa thức của một hay một số chữ có mặt trong nó. Sử dụng các tính chất của định thức, ta biến đổi nó sao cho có thể nhận biết được rằng nó chia hết cho (tức là một hàng nào đó của nó chia hết cho) một số nhân tử nào đó (thường là bậc nhất). Khi đó thương tích của các nhân tử đó cũng là một nhân tử của định thức (nếu các nhân tử đó nguyên tố cùng nhau từng đôi một). Bằng cách so sánh các số hạng riêng biệt nào đó của tích các nhân tử với các số hạng của định thức, ta sẽ tính được nhân tử kia.

4. Phương pháp truy toán. Biến đổi, khai triển định thức theo hàng (cột) sao cho có thể biểu diễn định thức đã cho qua các định thức cùng dạng nhưng có cấp thấp hơn, tức là tìm được một hệ thức truy toán

$$f(D_n, D_{n-1}, \ldots) = 0, \qquad (1)$$

trong đó D_n, $D_{n-1}, \ldots$ là các định thức cùng dạng cấp n, cấp $n-1, \ldots$ Sau đó, tính biểu thức của vài định thức cấp thấp, từ đó tính được định thức phải tìm nhờ áp dụng liên tiếp hệ thức truy toán (1).

Hệ thức truy toán có thể được tìm ra bằng quá trình quy nạp: từ các định thức cùng dạng với định thức đã cho cấp 2, cấp 3,... ta suy đoán ra hệ thức (1). Nhưng khi đó phải sử dụng phép chứng minh quy nạp thì hệ thức tìm được mới có giá trị.

5. Phương pháp tách thành tổng. Một số định thức có thể tính được dễ dàng hơn nhiều nếu viết chúng

thành tổng các định thức cùng cấp theo hàng (cột). các định thức hạng tử này thường dễ tính được bằng một trong các phương pháp trên.

6. Dùng định lý Laplaxơ. Trong định thức D cấp n, lấy ra k hàng (cột) nào đó ($1 \leqslant k \leqslant n-1$), và lập tất cả các định thức con cấp k có mặt trong k hàng đó: M_1, M_2,..., M_s. Ký hiệu A_i là phần phụ đại số của M_i ($i = 1,..., s$) thì

$$D = M_1A_1 + M_2A_2 + ... M_sA_s.$$

Một hệ n phương trình tuyến tính n ẩn với định thức khác không được gọi là *hệ Krame*. Hệ này có một nghiệm duy nhất tính theo công thức

$$x_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = 1, 2,... n).$$

trong đó D là định thức của hệ, D_j là định thức tạo thành khi thay cột thứ j của D bởi cột các số hạng tự do (định lý Krame).

Hệ phương trình tuyến tính tổng quát với m phương trình n ẩn số có dạng

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \ i = 1, 2,..., m. \qquad (1)$$

Ma trận $A = [a_{ij}]$ cấp $m \times n$ được gọi là ma trận của hệ, ma trận B do ma trận A ghép thêm cột các hạng tử tự do b_1, b_2,... b_m vào thành cột cuối được gọi là *ma trận bổ sung* hay *ma trận mở rộng* của hệ.

Định lý Kronecke — Capeli. *Hệ (1) có nghiệm khi và chỉ khi hạng của ma trận A bằng hạng của ma trận mở rộng B.*

Trong trường hợp hệ có nghiệm, nếu hạng của các ma trận đó là $r = n$ (số ẩn) thì hệ trở thành hệ Krame v. có nghiệm duy nhất, nếu hạng r bé hơn số ẩn n thì hệ v. định, có vô số nghiệm phụ thuộc $n - r$ tham số (n là s. ẩn, r = hạng A = hạng B).

Đối với các hệ phương trình với hệ số bằng số, ta còn hay dùng *phương pháp Gauxơ* để giải : Giả sử $a_{11} \neq$ (nếu $a_{11} = 0$ thì ta đổi thứ tự các phương trình) ta nhân phương trình thứ nhất của hệ (1) lần lượt với $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$

$-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}, ..., -\dfrac{a_{m1}}{a_{11}}$ rồi cộng vào các vế tương ứng của phương trình thứ hai, thứ ba, . thứ m. Như vậy ta s được hệ sau, tương đương với hệ (1) :

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a'_{p2}x_2 + \dots + a'_{pn}x_n &= b'_p \end{aligned}\right\} \quad (2$$

Hệ (2) có $p (\leqslant m)$ phương trình vì có thể có một và phương trình giống nhau, hoặc phương trình $0x = 0$ c. thể bỏ đi được. Nếu không xảy ra trường hợp vô nghiệm (hệ chứa phương trình dạng $0x_2 + ... + 0x_n = b'_i$ vớ $b'_i \neq 0$) thì ta lại tiếp tục biến đổi hệ gồm $p - 1$ phương trình sau của hệ trừ phương trình đầu, theo cùng đường lối như trên. Như vậy, cuối cùng ta sẽ được một hệ tương đương với hệ (1) đã cho, có dạng bậc thang.

Nếu trong quá trình biến đổi ta gặp một phương trình vô nghiệm thì ta dừng lại và kết luận rằng hệ đã cho v. nghiệm. Nếu sau khi biến đổi ta được một hệ *tam giác* nghĩa là phương trình cuối cùng có dạng $a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1}$ thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất, nghiệm này thu được

bằng cách giải từng phương trình từ dưới lên và thay thế dần các nghiệm tìm được vào phương trình trên nó. Nếu hệ cuối cùng có dạng bậc thang, trong đó phương trình cuối cùng còn lại các ẩn $x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n$ thì hệ đã cho là vô định phụ thuộc $n - r$ tham số.

Trường hợp tất cả các hạng tử tự do b_i trong hệ (1) đều bằng 0 thì hệ (1) được gọi là hệ phương trình tuyến tính *thuần nhất* (*hoặc đẳng cấp*). Hệ đẳng cấp bao giờ cũng có nghiệm, ít nhất là nghiệm (0, 0,..., 0) vì hạng A = hạng B. Như vậy nếu hạng $A = r < n$ thì ngoài nghiệm 0, còn vô số nghiệm khác không, phụ thuộc $n - r$ tham số. Một hệ thống nghiệm :

$$\gamma_i = (c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{in}),\ i = 1, 2, \ldots, k$$

được gọi là một *hệ cơ bản* các nghiệm nếu nó là một hệ vectơ độc lập tuyến tính và mọi nghiệm của hệ thuần nhất đều biểu thị tuyến tính được qua chúng.

Nếu hạng r của ma trận A các hệ số nhỏ hơn số ẩn ($r < n$) thì hệ thuần nhất có ít nhất một hệ cơ bản gồm $n - r$ nghiệm. Muốn tìm một hệ cơ bản các nghiệm của hệ đẳng cấp, cách đơn giản nhất là ta gán cho $n - r$ tham số (tức là $n - r$ ẩn tự do trong công thức nghiệm tổng quát của hệ đẳng cấp) lần lượt các bộ giá trị :

$$\begin{matrix} x_{r+1} & x_{r+2} & \ldots & x_n \\ 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ . & . & & . \\ 0 & 0 & & 1 \end{matrix}$$

rồi tính các giá trị của các ẩn khác theo chúng. Như vậy ta sẽ được $n - r$ nghiệm của hệ thuần nhất (mỗi nghiệm có đủ n thành phần) lập thành một hệ cơ bản các nghiệm.

§1. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT CỦA ĐỊNH THỨ

55. Chỉ dùng định nghĩa định thức, tính các định th
sau :

a) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 \dots & n \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \dots 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 & 0 \\ . & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & a & a \dots & a \\ 0 & 2 & a \dots & a \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 \dots & n \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} F(0) & F(1) & F(2) \dots F(n) \\ F(1) & F(2) & F(3) \dots F(n+1) \\ . & . & . \\ F(n) & F(n+1) & (Fn+2) \dots F(2n) \end{vmatrix}$

với $F(x) = x(x-1)(x-2) \dots (x-n+1)$

f) $\begin{vmatrix} F(a) & F'(a) & F''(a) \dots F^{(n)}(a) \\ F'(a) & F''(a) & F'''(a) \dots F^{(n-1)}(a) \\ . & . & . \\ F^{(n)}(a) & F^{(n+1)}(a) & F^{(n+2)}(a) \dots F^{(2n)}(a) \end{vmatrix}$

với $F(x)$ như trên.

56. a) Trong định thức cấp n, mỗi phần tử a_{ki} là
phức liên hợp của phần tử a_{ik}. Chứng minh rằng đị
thức ấy bằng một số thực.

b) Định thức phản đối xứng là định thức mà các ph
tử nằm đối xứng nhau qua đường chéo chính thì
nhau, nghĩa là $a_{ik} = -a_{ki}$. Chứng minh rằng định th
phản đối xứng cấp n bằng 0, nếu n lẻ.

57. Định thức thay đổi thế nào nếu ta :

a) viết các hàng theo thứ tự ngược lại?

b) thay mỗi phần tử bởi phần tử đối xứng với nó qua « tâm »?

c) đổi dấu mọi phần tử của định thức?

d) Nhân mỗi phần tử a_{ik} với c^{i-k} $(c \neq 0)$?

e) cộng thêm vào mỗi cột (kể từ cột thứ hai) cột đứng trước nó; riêng cột cuối đem cộng vào cột đầu?

58. Không khai triển, tính các định thức:

a) $$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

b) $$\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix};$$ c) $$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$$

d) $$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos 2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos 2\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos 2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix};$$ e) $$\begin{vmatrix} \sin a & \cos a & \sin(a+d) \\ \sin b & \cos b & \cos(b+d) \\ \sin c & \cos c & \cos(c+d) \end{vmatrix};$$

f) $$\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix};$$ g) $$\begin{vmatrix} x & x' & ax+bx' \\ y & y' & ay+by' \\ z & z' & az+bz' \end{vmatrix};$$

h) $$\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^2 & a_1^2+b_1^2 & a_1 & b_1 \\ (a_2+b_2)^2 & a_2^2+b_2^2 & a_2 & b_2 \\ (a_3+b_3)^2 & a_3^2+b_3^2 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

59. Giải các phương trình :

a) $$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = 0,$$

(tr)ong đó $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ đều khác nhau ;

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-1-x \end{vmatrix} = 0;$$

c) $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & \dots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1}+a_n-x \end{vmatrix} = 0$$

60. Không tính định thức, chứng minh rằng :

a) $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

b) $$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

c) $$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

d) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$;

e) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$;

f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$.

§2. TÍNH ĐỊNH THỨC

61. Tính các định thức:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$;

f) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$;

g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos c & \cos b \\ 1 & \cos c & 1 & \cos a \\ 1 & \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix}$.

62. Tính các định thức :

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_2 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x & \dots & x_{n-1} & x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \dots & n-1 & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$

63. Tính các định thức :

a) $\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & \dots & n-3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$.

64. Tính các định thức :

a) $\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \dots & C_n^{n-2} & C_n^{n-1} & C_n^n \\ 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & C_{n-1}^3 & \dots & C_{n-1}^{n-2} & C_{n-1}^{n-1} & 0 \\ 1 & C_{n-2}^1 & C_{n-2}^2 & C_{n-2}^3 & \dots & C_{n-2}^{n-2} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & C_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & \dots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & \dots & C_{n+1}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \dots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & C_1^1 & 0 & \dots & 0 & x \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & \dots & 0 & x^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & \dots & C_n^{n-1} & x^n \end{vmatrix}$.

65. Tính các định thức :

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \theta & 0 & \dots & 2\cos 0 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & x & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$.

66. Tính các định thức :

a) $\begin{vmatrix} a & a+h & a+2h & \dots & a+(n-1)h \\ a+h & a+2h & a+3h & \dots & a \\ a+2h & a+3h & a+4h & \dots & a+h \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a+(n-1)h & a & a+h & \dots & a+(n-2)h \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x \end{vmatrix}$.

67. Tính các định thức :

a) $\begin{vmatrix} \cos^{n-1}\varphi_1 & \cos^{n-2}\varphi_1 & \dots & \cos\varphi_1 & 1 \\ \cos^{n-2}\varphi_2 & \cos^{n-2}\varphi_2 & \dots & \cos\varphi_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cos^{n-1}\varphi_n & \cos^{n-2}\varphi_n & \dots & \cos\varphi_n & 1 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \sin\varphi_1 & \sin\varphi_2 & \dots & \sin\varphi_n \\ \sin^2\varphi_1 & \sin^2\varphi_2 & \dots & \sin^2\varphi_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sin^{n-1}\varphi_1 & \sin^{n-1}\varphi_2 & \dots & \sin^{n-1}\varphi_n \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \dots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \dots & (a-n)^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a & a-1 & \dots & a-n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} (a_1+x)^n & (a_1+x)^{n-1} & \dots & a_1+x & 1 \\ (a_2+x)^n & (a_2+x)^{n-1} & \dots & a_2+x & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (a_{n-1}+x)^n & (a_{n+1}+x)^{n-1} & \dots & a_{n+1}+x & 1 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$

68. Tính các định thức :

a) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}$.

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ y_1 & y_2 & \cos\beta & \sin\beta \\ z_1 & z_2 & \cos\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ b_2 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & c_2 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}$.

69. Tính định thức cấp 15 :

$$\begin{vmatrix} \Delta & \Delta_1 & \Delta_1 \\ \Delta_1 & \Delta & \Delta_1 \\ \Delta_1 & \Delta_1 & \Delta \end{vmatrix}$$

trong đó

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & x & x & -x & -x \\ x & 2a & a & 0 & 0 \\ x & a & 2a & 0 & 0 \\ -x & 0 & 0 & 2a & a \\ -x & 0 & 0 & a & 2a \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

b) Tính định thức Δ bằng cách nhân nó với định thức δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix};$$

c) Tính bình phương của định thức

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & c & b & a \end{vmatrix}.$$

70. a) Chứng minh rằng: nếu ma trận A cấp n trên trường số phức thỏa mãn điều kiện

$$|a_{kk}| > \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^{n} |a_{ks}| \quad (k = 1, \dots, n) \qquad (1)$$

thì $\det A \neq 0$.

Áp dụng: Xét ma trận

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0.9 & 1 \\ 1.2 & 3 & -1.7 \\ 2.3 & -1,1 & 3.5 \end{bmatrix}.$$

b) Nếu ma trận A trên trường số thực có $a_{ii} > 0$ và thỏa mãn điều kin (1) nói trên thì det $A > 0$.

71. Hàm $f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ của n vectơ $\alpha_i \in \mathbf{R}^n$, $i=1,...,n$ với giá trị thực được gọi là một hàm *đa tuyến tính* nếu

$$f(\alpha_1, ..., c'\alpha_i' + c''\alpha_i'', ..., \alpha_n) =$$

$$= c'f(\alpha_1, ..., \alpha_i', ..., \alpha_n) + c''f(\alpha_1, ..., \alpha_i'', ..., \alpha_n) \quad (1)$$

đối với các vectơ bất kỳ, các số thực c', c'' bất kỳ và $i = 1, ..., n$ tùy ý. Hàm đó được gọi là có tính *linh hóa* nếu

$$f(\alpha_1, ..., \alpha_i, ..., \alpha_j, ..., \alpha_n) = 0 \text{ khi } \alpha_i = \alpha_j, \quad (2)$$

$$i, j = 1, 2, ..., n\,;\ i \neq j.$$

Hàm $f(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ được gọi là *chuẩn hóa* nếu

$$f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) = 1 \quad (3)$$

trong đó ε_i là hệ vectơ đơn vị ($i = 1, ..., n$) của $\mathbf{R}^n$.

Giả sử đã cho ma trận A cấp n trên trường số thực. Chứng minh rằng :

a) Định thức $|A|$ là một hàm đa tuyến tính linh hóa và chuẩn hóa của các hàng của ma trận A.

b) Mọi hàm của n vectơ thuộc $\mathbf{R}^n$, đa tuyến tính, linh hóa đều thỏa mãn đẳng thức

$$f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = |A|\, f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n),$$

trong đó A là ma trận với các hàng $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

c) Mọi hàm $f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ có các tính chất (1), (2), (3) đều bằng định thức $|A|$ của ma trận A với các hàng là $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. Nói khác đi, định thức $|A|$ của ma trận A là hàm đa tuyến tính linh hóa và chuẩn hóa duy nhất của các hàng của nó.

72. a) Dùng câu b) của bài trên, chứng minh định lý về phép nhân định thức.

b) Chứng minh rằng đối với các hàm của n vectơ trên một trường với đặc số khác 2, tính chất (2) ở bài trên tương đương với tính thay phiên của hàm, tức là

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n) = -f(\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) \quad (2')$$

đối với các vectơ bất kỳ và $i, j = 1, 2, \ldots, n$; $i \neq j$.

c) Xây dựng ví dụ về một hàm của n vectơ trên trường P với đặc số 2, có các tính chất (1), (2'), (3) nhưng không có tính chất (2).

73. Biểu diễn định thức:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} + x & a_{12} + x \ldots a_{1n} + x \\ a_{21} + x & a_{22} + x \ldots a_{2n} + x \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} + x & a_{n2} + x \ldots a_{nn} + x \end{vmatrix}$$

thành một đa thức theo lũy thừa của x.

b) Chứng minh rằng nếu tất cả các phần tử của một hàng (cột) nào đó của định thức bằng đơn vị, thì tổng các phần phụ đại số của tất cả các phần tử của định thức bằng chính định thức đó.

74. a) Chứng minh rằng tổng các phần phụ đại số của tất cả các phần tử của định thức

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

bằng định thức

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_{21} - a_{11} & a_{22} - a_{12} & \ldots & a_{2n} - a_{1n} \\ a_{31} - a_{11} & a_{32} - a_{12} & \ldots & a_{3n} - a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} - a_{11} & a_{n2} - a_{12} & \ldots & a_{nn} - a_{1n} \end{vmatrix}$$

b) Chứng minh rằng tổng các phần phụ đại số của tất cả các phần tử của định thức không thay đổi nếu ta thêm vào tất cả các phần tử cùng một số.

75. a) Tìm quy luật thành lập biểu thức khai triển của cái « liên phân » cấp n :

$$(a_1 a_2 \dots a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{vmatrix}$$

tức là biểu thị nó dưới dạng đa thức của $a_1, a_2, \dots, a_n$. Viết cái liên phân cấp 4, cấp 5 và cấp 6 dưới dạng khai triển.

b) Thiết lập mối liên hệ giữa cái liên phân trong câu trên và phân số liên tục :

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} = \frac{(a_1 a_2 \dots a_n)}{(a_2 a_3 \dots a_n)}.$$

76. Chứng minh rằng một định thức dạng tổng quát, xem như một đa thức của các phần tử của nó, không phân tích được thành hai nhân tử mà mỗi một trong chúng là đa thức của cùng các ẩn với bậc khác 0. Nói khác đi, định thức là một đa thức bất khả quy của các phần tử của nó trên một trường tùy ý.

77. Giả sử $D = |a_{ij}|$ là một định thức cấp $n > 1$, k là số bất kỳ trong các số $1, 2, \ldots, n$; $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; ta ký hiệu $s_1, s_2, \ldots, s_{C_n^k}$ là các tổ hợp chập k có thể được của n số $1, 2, \ldots, n$, được đánh số tùy ý nhưng không thay đổi về sau này (chẳng hạn có thể đánh số theo thứ tự tăng, dù điều đó không cần thiết); M_{ij} là định thức con cấp k của định thức D tạo thành từ giao điểm của các hàng với các số hiệu trong tổ hợp s_i và các cột với các số hiệu trong tổ hợp s_j, $i, j = 1, 2, \ldots, C_n^k$; A_{ij} là phần phụ đại số của M_{ij} trong D. Định thức của các định thức con cấp k của định thức D là định thức cấp C_n^k có dạng :

$$\begin{vmatrix} M_{11} & M_{11} & \ldots & M_{1C_n^k} \\ M_{21} & M_{22} & \ldots & M_{2C_n^k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ M_{C_n^k 1} & M_{C_n^k 2} & \ldots & M_{C_n^k C_n^k} \end{vmatrix}$$

Ta đưa vào định thức $\overline{\Delta_k}$ cấp C_n^k thu được từ Δ_k bằng cách thay mỗi định thức con M_{ij} bởi phần phụ đại số A_{ij} của nó trong D. Chứng minh rằng :

a) Các giá trị của định thức Δ_k và $\overline{\Delta_k}$ không thay đổi khi thay đổi cách đánh số các tổ hợp, tức là khi hoán vị các tổ hợp trong dãy $s_1, s_2, \ldots, s_{C_n^k}$.

b) $\Delta_k = \Delta_{n-k}$.

c) $\Delta_k \cdot \overline{\Delta_k} = D^{C_n^k}$.

d) $\Delta_k = D^{C_{n-1}^{k-1}}$

e) $\overline{\Delta_k} = D^{C_{n-1}^{k}}$

78. a) Tính định thức $P_n = | p_{ij} |$, trong đó $p_{ij} = 1$, nếu i chia hết j và $p_{ij} = 0$ nếu i không chia hết j. Tìm giá trị của định thức $Q_n = | q_{ij} |$, trong đó q_{ij} bằng số các ước chung của các số i và j.

b) Chứng minh rằng định thức $D_{ij} = | q_{ij} |$ cấp n, trong đó d_{ij} là ước chung lớn nhất của các số i và j, bằng $\varphi(1)\varphi(2) \ldots \varphi(n)$, trong đó $\varphi(k)$ là hàm Ơle, bằng số các số tự nhiên bé hơn k và nguyên tố với k.

§3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

79. Giải các hệ phương trình sau :

a) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 9x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 8x_3 - 8x_4 + 27x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 16x_3 + 16x_4 + 81x_5 = 0; \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2; \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 = 5; \end{cases}$$

d) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 13 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 11 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$

80. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} -x + y + z + t = a \\ x - y + z + t = b \\ x + y - z + t = c \\ x + y + z - t = d \end{cases}$

b) $\begin{cases} a(x + t) + b(y + z) = c \\ a'(y + t) + b'(z + x) = c' \\ a''(z + t) + b''(x + y) = c'' \\ x + y + z + t = d. \end{cases}$

trong đó $a \neq b$, $a' \neq b'$, $a'' \neq b''$.

81. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = t \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^{n-1}x_1 + a_2^{n-1}x_2 + \ldots a_n^{n-1}x_n = t^{n-1}, \end{cases}$

trong đó $a_1, a_2, \ldots, a_n$ đều khác nhau;

b) $\begin{cases} ax_1 + bx_2 + \ldots + bx_n = c_1 \\ bx_1 + ax_2 + \ldots + bx_n = c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ bx_1 + bx_2 + \ldots + ax_n = c_n; \end{cases}$

trong đó $(a - b)[a + (n - 1)b] \neq 0$;

c) $\begin{cases} ay + bx = c \\ cx + az = b \\ bz + cy = a \end{cases}$

với $abc \neq 0$.

82. a) Tìm tam thức bậc hai $f(x)$, biết :

$$f(1) = -1,\ f(-1) = 9,\ f(2) = -3.$$

b) Tìm đa thức bậc ba $f(x)$, biết :

$$f(-1) = 0,\ f(1) = 4,\ f(2) = 3,\ f(3) = 16.$$

83. Giải các hệ phương trình :

a) $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ \qquad x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 \qquad - 3x_4 = 1 \\ \quad - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3; \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0; \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = -2 \\ \qquad x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12; \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1 \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1; \end{cases}$$

e) $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 3; \end{cases}$$

f) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_2 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 \qquad = 2_3. \end{cases}$$

84. Giải và biện luận các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^2; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \lambda x + y + z + t = 1 \\ x + \lambda y + z + t = \lambda \\ x + y + \lambda z + t = \lambda^2 \\ x + y + z + \lambda t = \lambda^3; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + ay + a^2 z = a^3 \\ x + by + b^2 z = b^3 \\ x + cy + c^2 z = c^3; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2 x + b^2 y + c^2 z = d^2. \end{cases}$

85. Giải và biện luận các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + by + z = 3 \\ x + 2by + z = 4; \end{cases}$

b) $\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1; \end{cases}$

c) $\begin{cases} ax + y + z = m \\ x + ay + z = n \\ x + y + az = p; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + ay + a^2 z = 1 \\ x + ay + abz = a \\ bx + a^2 y + a^2 bz = a^2 b. \end{cases}$

86. Giải và biện luận các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} (\lambda + 3)x + y + 2z = \lambda \\ \lambda x + (\lambda - 1)y + z = 2\lambda \\ 3(\lambda + 1)x + \lambda y + (\lambda + 3)z = 3; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \lambda x + \lambda y + (\lambda + 1)z = \lambda \\ \lambda x + \lambda y + (\lambda - 1)z = \lambda \\ (\lambda + 1)x + \lambda y + (2\lambda + 3)z = 1; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - x_2 + kx_3 + x_4 = k \\ x_1 + kx_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ kx_1 + kx_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -k. \end{cases}$

87. Giải và biện luận :

a) $\begin{cases} 3kx + (2k + 1)y + (k + 1)z = k \\ (2k - 1)x + (2k - 1)y + (k - 2)z = k + 1 \\ (4k - 1)x + 3ky + 2kz = 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} ax + by + 2z = 1 \\ ax + (2b - 1)y + 3z = 1 \\ ax + by + (b + 3)z = 2b - 1; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + (a + 1)z = a^2 + 3a \\ x + (a + 1)y + z = a^3 + 3a^2 \\ (a + 1)x + y + z = a^4 + 3a^3. \end{cases}$

88. Giải và biện luận :

a) $\begin{cases} 3mx + (3m - 7)y + (m - 5)z = m - 1 \\ (2m - 1)x + (4m - 1)y + 2mz = m + 1 \\ 4mx + (5m - 7)y + (2m - 5)z = 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} (2m + 1)x - my + (m + 1)z = m - 1 \\ (m - 2)x + (m - 1)y + (m - 2)z = m \\ (2m - 1)x + (m - 1)y + (2m - 1)z = m; \end{cases}$

c) $\begin{cases} (5\lambda + 1)x + 2\lambda y + (4\lambda + 1)z = 1 + \lambda \\ (4\lambda - 1)x + (\lambda - 1)y + (4\lambda - 1)z = - \\ 2(3\lambda + 1)x + 2\lambda y + (5\lambda + 2)z = 2 - \lambda. \end{cases}$

89. Giải và biện luận :

a) $\begin{cases} (2c + 1)x - cy - (c + 1)z = 2c \\ 3cx - (2c - 1)y - (3c - 1)z = c + 1) \\ (c + 2)x - y - 2cz = 2 ; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2(\lambda + 1)x + 3y + \lambda z = \lambda + 4 \\ (4\lambda - 1)x + (\lambda + 1)y + (2\lambda - 1)z = 2\lambda + 2 \\ (5\lambda - 4)x + (\lambda + 1)y + (3\lambda - 4)z = \lambda - 1 ; \end{cases}$

c) $\begin{cases} dx + (2d - 1)y + (d + 2)z = 1 \\ \qquad (d - 1)y + (d - 3)z = 1 + d \\ dx + (3d - 2)y + (3d + 1)z = 2 - d \end{cases}$

d) $\begin{cases} (3a - 1)x + 2ay + (3a + 1)z = 1 \\ 2ax + 2ay + (3a + 1)z = a \\ (a + 1)x + (a + 1)y + 2(a + 1)z = a^2. \end{cases}$

90. Giải và biện luận các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} (1 + \lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (1 + \lambda)x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + (1 + \lambda)x_3 = \lambda^2 ; \end{cases}$

b) $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + by + z = 1 \\ x + y + cz = 1. \end{cases}$

c) $\begin{cases} ax + y + z = a \\ x + by + z = b \\ x + y + cz = c. \end{cases}$

91. Tìm điều kiện ắt có và đủ để :

a) ba điểm $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ cùng nằm trên một đường thẳng ?

b) ba đường thẳng

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$
$$a_3x + b_3y + c_3 = 0.$$

đồng quy tại một điểm?

c) n điểm của mặt phẳng $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ cùng nằm trên một đường thẳng?

d) n đường thẳng trên mặt phẳng

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_nx + c_ny + b_n = 0$$

cùng đi qua một điểm?

e) bốn điểm không thẳng hàng trên mặt phẳng (x_o, y_o), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) cùng nằm trên một đường tròn.

f) bốn điểm $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, $M_4(x_4, y_4, z_4)$ cùng nằm trên một mặt phẳng?

g) bốn mặt phẳng

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0,$$
$$a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0.$$

cùng đi qua một điểm?

92. a) Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm không thẳng hàng (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3).

b) Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm $(1, 2)$, $(1 - 2)$, $(0, -1)$; tìm tâm và bán kính của nó.

c) Chứng minh rằng đường tròn đi qua ba điểm với toạ

d) Tìm ý nghĩa hình học của một hệ bốn phương trình tuyến tính ba ẩn, trong đó hạng của tất cả các ma trận hệ số của ba phương trình và hạng của ma trận bổ sung đều bằng ba?

93. a) Viết phương trình đường cong bậc hai đi qua năm điểm:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5).$$

b) Viết phương trình và xác định dạng của đường cong bậc hai đi qua năm điểm:

$$(3, 0), (-3, 0), \left(5, 6\frac{2}{3}\right), \left(5, -6\frac{2}{3}\right), \left(-5, -6\frac{2}{3}\right).$$

c) Viết phương trình và xác định các yếu tố của đường cong bậc hai đi qua năm điểm:

$$(0, 1), (\pm 2, 0), (\pm 1, -1).$$

94. a) Viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm: $(x_1\ y_1\ z_1)$ (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4) không cùng nằm trên một mặt phẳng.

b) Viết phương trình, tìm tâm và bán kính của mặt cầu đi qua các điểm: (1, 1, 1), (1, 1, —1), (1, —1, 1), (—1, 0, 0).

95. Hệ phương trình tuyến tính nào cho ta:

a) ba đường thẳng khác nhau trên mặt phẳng đi qua một điểm?

b) ba đường thẳng trên mặt phẳng tạo thành tam giác?

c) ba mặt phẳng trong không gian không có điểm chung, nhưng đôi một cắt nhau?

d) bốn mặt phẳng của không gian tạo thành tứ diện?

96. Xét tất cả các trường hợp có thể được khi giải các hệ phương trình tuyến tính hai ẩn và ba ẩn và trong mỗi trường hợp, giải thích ý nghĩa hình học của hệ phương trình đã cho.

97. Chứng minh rằng :

a) Nếu A là một ma trận hạng r, gồm một hệ cơ bản các nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất và B là một ma trận tùy ý cấp r không suy biến thì BA cũng là một ma trận gồm một hệ cơ bản các nghiệm của hệ phương trình ấy.

b) Nếu hai ma trận A và C hạng r gồm các hệ cơ bản các nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính đẳng cấp, thì một trong hai ma trận ấy là tích của một ma trận B cấp r không suy biến với ma trận kia, tức là $A = BC$.

98. Tìm nghiệm tổng quát và hệ nghiệm cơ bản của các hệ phương trình thuần nhất :

a) $$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 ; \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_5 = 0 \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0 \\ -x_3 + x_5 = 0 \\ -x_4 + x_6 = 0 ; \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 - x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

e) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

99. a) Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ xác định bởi ma trận sau trên cơ sở đơn vị :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 8 \\ 4 & 6 & -2 & 24 \\ -3 & -4 & 3 & -10 \end{bmatrix}.$$

Tìm Ker$f$. Xác định một cơ sở và do đó tìm số chiều của Ker$f$.

b) Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^4$ xác định bởi ma trận sau trên cơ sở đơn vị :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & -5 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Xác định Ker$f$. Tìm một cơ sở và số chiều của Ker$f$.

c) Cũng các câu hỏi trên đối với ánh xạ tuyến tính φ : $\mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^4$ xác định bởi ma trận sau trên cơ sở đơn vị :

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 4 \\ 5 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}.$$

d) Cũng các câu hỏi trên đối với ánh xạ tuyến tính ψ : $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ xác định bởi ma trận sau trên cơ sở đơn vị :

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 1 & 9 \\ 2 & 5 & -4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Trong trường hợp này, có thể nói gì về ánh xạ ψ ?

e) Với giá trị nào của a thì phép biến đổi tuyến tính f trong $\mathbf{R}^3$ xác định bởi ma trận :

$$F = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

sẽ là một tự đẳng cấu của $\mathbf{R}^3$?

100. Chứng minh rằng :

a) Tập N tất cả các nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất n ẩn với hệ số thực lập thành một không gian con của không gian tuyến tính $\mathbf{R}^n$.

b) Số chiều của không gian N bằng $n - r$, trong đó n là số ẩn và r là hạng của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

c) N có thể xem là hạt nhân của một ánh xạ tuyến tính f từ $\mathbf{R}^n$ vào một không gian tuyến tính thích hợp. Tìm số chiều và xác định một cơ sở của $\mathrm{Ker} f$.

101. Chứng minh rằng :

a) Nếu hạng của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất bé hơn số ẩn một đơn vị thì hai nghiệm bất kỳ của hệ đó tỷ lệ với nhau, tức là chỉ khác nhau một thừa số (có thể bằng 0).

b) Nếu trong một hệ phương trình tuyến tính đẳng cấp số phương trình ít hơn số ẩn một đơn vị thì có thể nhận làm nghiệm một bộ định thức con thu được từ ma trận hệ

số bằng cách bỏ lần lượt cột thứ nhất, thứ hai..., và các định thức con đó lấy với dấu đan nhau.

c) Nếu nghiệm nói trên khác 0 thì một nghiệm bất kỳ thu được bằng cách nhân nó với một số nào đó.

102. Tìm điều kiện ắt có và đủ để :

a) hoặc tổng của hai nghiệm, hoặc tích của một nghiệm với số $\lambda \neq 1$ lại là nghiệm của cùng một hệ phương trình tuyến tính ?

b) một tổ hợp tuyến tính của các nghiệm bất kỳ của một hệ phương trình tuyến tính không đẳng cấp đã cho là một nghiệm của hệ đó ?

c) trong các nghiệm bất kỳ của một hệ phương trình tuyến tính tương thích, ẩn x_k luôn có cùng một giá trị ?

103. a) Tìm điều kiện ắt có và đủ để trong một nghiệm bất kỳ của một hệ phương trình tuyến tính tương thích, ẩn thứ k bằng 0.

b) Những giá trị nào có thể nhận làm ẩn trong các nghiệm bất kỳ của một hệ phương trình tuyến tính tương thích, nếu các cột hệ số của tất cả các ẩn, trừ ẩn đầu, cũng như cột các số hạng tự do đôi một khác nhau chỉ bởi các thừa số bằng số ?

c) Bao nhiêu điều kiện khác nhau có thể được thỏa mãn để một hệ phương trình tuyến tính với n ẩn là tương thích và chứa r phương trình độc lập mà đối với chúng các phương trình còn lại là hệ quả của chúng ?

104. Tìm các điều kiện để :

a) trong nghiệm tổng quát của hệ phương trình :

$$\begin{cases} y + az + bt = 0 \\ -x + cz + dt = 0 \\ ax + cy - et = 0 \\ bx + dy + ez = 0 \end{cases}$$

có thể nhận z và t làm ẩn tự do ?

b) hệ phương trình

$$
\begin{aligned}
x &= by + cz + du + ev \\
y &= \quad\; cz + du + ev + ax \\
z &= by \quad\;\; + du + ev + ax \\
u &= by + cz + \quad\;\; ev + ax \\
v &= by + cz + du \quad\;\; + ax
\end{aligned}
$$

có nghiệm khác không?

c) hệ phương trình trên trường số thực:

$$
\begin{aligned}
\lambda x + ay + bz + ct &= 0 \\
-ax + \lambda y + hz - gt &= 0 \\
-bx - hy + \lambda z + ft &= 0 \\
-cx + gy - fz + \lambda t &= 0
\end{aligned}
$$

có nghiệm khác không?

CHƯƠNG III

KHÔNG GIAN VECTƠ VÀ MÔĐUN

Giả sử A là một vành chứa đơn vị 1. Một tập $M \neq \phi$ được gọi là một *môđun* trên A nếu trên M ta đã xác định một phép toán gọi là phép cộng và với mỗi $x \in M$, $a \in A$ đã xác định một phần tử thuộc M gọi là tích của a với x và ký hiệu là ax, sao cho các điều kiện sau thỏa mãn với mọi $x, y, z \in M$, $a, b \in A$:

1. $x + y = y + x$.
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$.

3. Tồn tại $0 \in M$ sao cho $0 + x = x$.
4. Với $x \in M$ tồn tại $-x \in M$ để $(-x) + x = 0$.
5. $(ab)x = a(bx)$.
6. $(a + b)x = ax + bx$.
7. $a(x + y) = ax + ay$.
8. $1a = a$.

Một tập con $N \neq \phi$ của môđun M được gọi là một *môđun con* của môđun M nếu bản thân N là một môđun trên vành A đối với các phép toán cảm sinh bởi các phép toán của môđun M.

Cho hai môđun M và M' trên cùng một vành A. Ánh xạ $\varphi : M \to M'$ được gọi là một đẳng cấu từ môđun M tới môđun M' nếu $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ và $\varphi(ax) = a\varphi(x)$ với mọi $x, y \in M$, $a \in A$. Nếu ngoài ra φ là một đơn ánh, toàn ánh hoặc song ánh thì tương ứng ta gọi φ là một đơn cấu, toàn cấu hoặc đẳng cấu.

Giả sử S là một tập con của môđun M trên vành A. Ta gọi phần tử $y \in M$ là một *tổ hợp tuyến tính* của các phần tử thuộc tập S nếu y có dạng

$$y = \sum_{x \in S}' a_x x,$$

trong đó $a_x \in A$ và dấu Σ' có nghĩa là chỉ có một số hữu hạn $a_x \neq 0$. Các phần tử a_x được gọi là các hệ tử của tổ hợp tuyến tính đó. Nếu y là một tổ hợp tuyến tính của các phần tử thuộc tập S thì ta cũng nói y *biểu thị tuyến tính* được qua tập S.

Tập tất cả các phần tử thuộc môđun M là tổ hợp tuyến tính của các phần tử thuộc tập con $S \subset M$ là một môđun con của M, gọi là môđun con sinh bởi tập S và ký hiệu là (S) và S gọi là *tập sinh* của môđun con đó. Nếu S chỉ gồm một phần tử x thì môđun sinh bởi x được ký hiệu là (x) và gọi là *môđun xiclic* hay *môđun chính*.

Một tập con S của môđun M được gọi là một *tập độc lập tuyến tính* nếu từ mỗi tổ hợp tuyến tính của các phần tử thuộc S bằng 0, suy ra mọi hệ tử bằng 0, tức là $\sum_{x \in S} a_x x = 0$ kéo theo $a_x = 0$ với mọi $x \in S$. Nếu trái lại, tập A được gọi là phụ thuộc tuyến tính. *Cơ sở* của một môđun M là một tập sinh độc lập tuyến tính của M. Một môđun có cơ sở được gọi là một *môđun tự do*.

Giả sử N là một môđun con của môđun M. *Môđun thương* M/N là tập các lớp $x + N$, $x \in M$ với các phép toán

$$(x + N) + (y + N) = (x + y) + N,$$
$$a(x + N) = ax + N.$$

Một môđun trên một trường P được gọi là một *không gian vectơ*. Nếu không gian vectơ V trên một trường P có cơ sở là S thì lực lượng của tập S được ký hiệu là $\dim V = |S|$ và được gọi là *số chiều* của V.

Giả sử $\dim V = n$, và trong V đã chọn một cơ sở $e_1, \ldots, e_n$. Mỗi vectơ $x \in V$ biểu thị một cách duy nhất qua cơ sở đó :

$$x = \sum_{i=1} \alpha_i e_i,\ \alpha_i \in P.$$

Các hệ tử α_i gọi là các *tọa độ* của x đối với cơ sở $e_1, \ldots, e_n$. Nếu ngoài cơ sở $\{e_i\}$, trong V ta lấy một cơ sở khác $u_1, \ldots, u_n$, thì ta có $u_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ma trận :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

gọi là *ma trận chuyển* từ cơ sở $\{e_i\}$ sang cơ sở $\{u_j\}$.

Hai không gian E và F trên cùng một trường P được gọi là *đẳng cấu*, nếu tồn tại một song ánh $\varphi : E \to F$ sao cho với mọi x, $y \in E$ và mọi $\alpha \in P$ ta có

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y),$$
$$\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x).$$

Không gian vectơ trên trường số phức $\mathbf{C}$ được gọi là một *không gian unita* nếu mỗi cặp vectơ x, $y \in E$ theo một thứ tự xác định được đặt tương ứng với một số phức gọi là *tích vô hướng* của x và y và ký hiệu là $\langle x, y \rangle$, thỏa mãn các điều kiện :

1° $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

2° $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$.

3° $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$.

4° Nếu $x \neq 0$ thì $\langle x, x \rangle > 0$.

Nếu trường cơ sở là trường số thực $\mathbf{R}$ thì không gian unita E được gọi là một không gian unita thực, hay *không gian Ơclit*. Lúc đó $\overline{\langle y, x \rangle}$ trùng với $\langle y, x \rangle$ và điều kiện 1° trở thành $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

Theo điều kiện 4°, $\langle x, x \rangle$ là một số thực dương với mọi $x \neq 0$. Căn số học bậc hai của $\langle x, x \rangle$ được gọi là *độ dài* hay *chuẩn* của vectơ x và ký hiệu là $\| x \| = + \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Hai vectơ x, y thuộc không gian unita (Ơclit) E được gọi là *trực giao* nếu $\langle x, y \rangle = 0$. Một hệ vectơ của E được gọi là *hệ trực giao* nếu hai vectơ khác nhau tùy ý

của hệ đó đều trực giao với nhau. Hệ vectơ $x_1, \ldots, x_k$ của không gian unita được gọi là một *hệ trực chuẩn* nếu :

$$\langle x_i, x_j \rangle = \begin{cases} 1 \text{ nếu } i = j, \\ 0 \text{ nếu } i \neq j. \end{cases}$$

Quá trình trực giao hóa hệ vectơ $a_1, a_2, \ldots, a_s$ là quá trình chuyển hệ đó tới hệ vectơ mới $b_1, b_2, \ldots, b_s$ xây dựng như sau : $b_1 = a_1$, $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i b_i$, $k = 2, 3, \ldots, s$, trong đó

$\alpha_i = \dfrac{\langle a_k, b_i \rangle}{\langle b_i, b_i \rangle}$, $i = 1, 2, \ldots k-1$ nếu $b_i \neq 0$ và α_i tùy ý nếu $b_i = 0$.

§ 1. KHÔNG GIAN TUYẾN TÍNH

105. Giả sử A là một tập vô hạn tùy ý, $V = \mathcal{F}(A)$ là tập tất cả các ánh xạ từ tập A tới trường số thực **R**. Ta định nghĩa các phép toán trên V như sau : với mọi $a \in A$, $f, g \in V$ và $\alpha \in$ **R** :

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a),$$
$$(\alpha f)(a) = \alpha f(a).$$

a) Chứng minh rằng V là một không gian trên trường số thực **R**.

b) Giả sử $\{a_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ là một tập con đếm được các phần tử của A. Với mọi $n = 1, 2, \ldots$ ta xét các ánh xạ $f_n \in V$ xác định như sau :

$$f_n(a) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } a = a_n, \\ 0 \text{ nếu } a \neq a_n \end{cases}$$

Chứng minh rằng tập $\{f_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ là một tập độc lập tuyến tính do đó V là một không gian vô hạn chiều.

106. Giả sử P là một trường tùy ý, A là một tập cho nào đó. $V = \text{Hom}(A, P)$ là tập tất cả các ánh xạ từ A tới P. Trên V ta định nghĩa các phép toán như trong bài tập **105**.

a) Chứng minh V là một không gian vectơ trên trường P.

b) Giả sử a_0 là một phần tử cố định thuộc A. Chứng minh rằng:

tập $F = \{f \in V \mid f(a_0) = 0\}$ là một không gian con của không gian V.

c) Chứng minh rằng F không được chứa trong không gian con thực sự nào của V (tức là khác V).

107. Giả sử V là tập tất cả các ánh xạ từ tập số thực $\mathbf{R}$ tới $\mathbf{R}$, với các phép toán định nghĩa như trong bài tập **105**.

a) Chứng minh rằng V là một không gian vectơ trên trường số thực $\mathbf{R}$. Trong không gian V tập $\{f_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ với $f_n(t) = \sin^n t$ có độc lập tuyến tính không?

b) Trong V xét tập con E các ánh xạ f sau đây:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

trong đó n là một số nguyên dương đã cho, a_i, b_j, $i = 0, 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, n$, là các số thực tùy ý. Chứng minh rằng E là một không gian con của V.

c) Tìm cơ sở của E và xác định $\dim E$.

108. Giả sử A là một tập con khác rỗng của không gian vectơ V trên một trường P. Chứng minh rằng:

a) A là một tập độc lập tuyến tính khi và chỉ khi mỗi tập con hữu hạn của tập A là một tập độc lập tuyến tính.

b) Nếu A là một tập độc lập tuyến tính và $x \in V$ không biểu thị tuyến tính được qua tập A thì tập $A \cup \{x\}$ là một tập độc lập tuyến tính.

c) Nếu $|A| \geqslant 2$ thì A là một tập phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại một phần tử $a \in A$ là tổ hợp tuyến tính của các phần tử thuộc tập $A \setminus \{a\}$.

109. Giả sử $V \neq \{0\}$ là một không gian vectơ trên một trường P, X là một tập sinh của không gian V. Chứng minh rằng :

a) Nếu $S \subset X$ là một tập con độc lập tuyến tính thì trong V tồn tại một cơ sở B sao cho $S \subset B \subset X$.

b) Hai cơ sở bất kỳ của không gian V có cùng lực lượng.

110. Cho E và F là hai không gian con hữu hạn chiều của một không gian vectơ V. Chứng minh rằng :

a) Tổng $E + F$ là một không gian hữu hạn chiều và dim $(E + F)$ + dim $(E \cap F)$ = dim E + dim F.

b) Nếu dim $(E + F)$ = dim $(E \cap F) + 1$ thì $E + F$ trùng với một trong hai không gian con E hoặc F và $E \cap F$ trùng với không gian con kia.

111. Giả sử E_1 và E_2 là hai không gian con của một không gian vectơ V. Chứng minh rằng :

a) V là tổng trực tiếp của các không gian con E_1 và E_2 khi và chỉ khi $V = E_1 + E_2$ và $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

Lúc đó ta nói E_1 là *bù trực tiếp của* E_2 và ngược lại E_2 là bù trực tiếp của E_1.

b) Mọi không gian con F của không gian V có giao bằng 0 với một không gian con E_1 của V sẽ được chứa trong một không gian con là bù trực tiếp của E_1.

c) Từ đó suy ra rằng mọi không gian con của không gian vectơ V đều có bù trực tiếp.

---

112. Giả sử E_{n+1} là tập tất cả các đa thức của x với hệ số phức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng n. Chứng minh rằng :

a) E_{n+1} là một không gian vectơ trên trường số phức với phép cộng các đa thức và phép nhân một đa thức với một số phức thông thường.

b) Các đa thức $f_p(x)$, $p = 0, 1, \ldots, n$, thuộc E_{n+1} mà bậc của $f_p(x)$ bằng p lập thành một cơ sở của E_{n+1}.

c) Nếu $f(x) \in E_{n+1}$ là một đa thức bậc $k \leqslant n$ thì tập $B_f = \{g(x) \in E_{n+1} \mid g(x) = f(x).\ u(x)\}$ là một không gian con của E_{n+1} mà dim $B_f = n - k + 1$, còn tập $C_f = \{h(x) \in E_{n+1} \mid \text{bậc } h(x) \leqslant k - 1\}$ là một không gian con bù trực tiếp của B_f.

113. Giả sử A là một tập con độc lập tuyến tính của một không gian vectơ V và B là một tập con thực sự của tập A. Chứng minh rằng nếu $x \in V$ là một vectơ không biểu thị tuyến tính được qua tập B thì tồn tại một vectơ $y \in A \setminus B$ sao cho tập $S = (A \setminus y) \cup \{x\}$ cũng là một tập độc lập tuyến tính.

114. Giả sử V là một không gian vectơ trên một trường P mà dim $V = \alpha$. Chứng minh rằng:

a) Lực lượng của mọi tập con độc lập tuyến tính của không gian V không thể lớn hơn α.

b) Không gian V đẳng cấu với không gian E trên trường P khi và chỉ khi dim V = dim E.

115. Giả sử P_0 là một trường con của trường P và V là một không gian vectơ trên trường P. Thế thì, P và V có thể coi là những không gian vectơ trên trường P_0. Chứng minh rằng nếu $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ là một cơ sở của không gian vectơ trên trường P và $(\beta_\mu)_{\mu \in I}$ là một cơ sở của P coi như không gian vectơ trên trường P_0 thì họ $(\beta_\mu x_\lambda)_{(\lambda, \mu) \in \Lambda \times I}$ là một cơ sở của không gian vectơ V trên trường P_0.

116. a) Chứng minh rằng tập $\mathcal{M}$ tất cả các ma trận vuông cấp n với phần tử thuộc trường P lập thành một không gian vectơ trên P, nếu các phép toán là phép

cộng ma trận và phép nhân một ma trận với một phần tử của trường P. Tìm cơ sở và số chiều của không gian vectơ đó.

b) Chứng minh rằng tập con $\mathcal{M}_1$ của $\mathcal{M}$ gồm các ma trận đối xứng, tức là $a_{ij} = a_{ji}$ là một không gian con của $\mathcal{M}$. Tìm cơ sở và số chiều của không gian $\mathcal{M}_1$.

c) Chứng minh rằng tập con $\mathcal{M}_2$ của $\mathcal{M}$ gồm các ma trận phản đối xứng, tức là $a_{ij} = -a_{ji}$ là một không gian con của không gian $\mathcal{M}$. Tìm cơ sở và số chiều của không gian $\mathcal{M}_2$.

d) Chứng minh rằng: $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$.

117. Cho V là không gian vectơ gồm các đa thức của x với hệ tử thuộc một trường P và bậc nhỏ hơn hoặc bằng một số nguyên dương n cho trước.

a) Chứng minh rằng $1, x, \ldots, x^n$ và $1, x-\alpha, \ldots, (x-\alpha)^n$ là hai cơ sở của không gian V trên trường P, trong đó α là một phần tử tùy ý của trường P.

b) Tìm tọa độ của vectơ $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, $a_i \in P$, đối với hai cơ sở đó.

c) Tìm ma trận chuyển từ cơ sở $1, x, \ldots, x^n$ tới cơ sở $1, x-\alpha, \ldots, (x-\alpha)^n$.

118. Giả sử P^n, $n \geqslant 1$ là không gian vectơ gồm các bộ n phần tử của trường P. Chứng minh rằng:

a) Các nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất n ẩn hạng r với hệ tử thuộc P lập thành một không gian con của không gian P^n, có số chiều là $d = n - r$.

b) Với mọi không gian con L của không gian P^n mà dim $L = d$ tồn tại một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất n ẩn hạng $r = n - d$ với hệ tử thuộc P mà tập các nghiệm trùng với không gian con L đã cho.

119. Cho V là một không gian vectơ trên một trường P. Ta định nghĩa một *đa tạp tuyến tính* D của không

gian V là một tập hợp có dạng $D = L + x_0$, trong đó L là một không gian con của V và x_0 là một vectơ nào đó thuộc V. Chứng minh rằng :

a) Đa tạp tuyến tính D hoàn toàn xác định bởi không gian con L, cụ thể là $L + x_0 = L_1 + x_1$ khi và chỉ khi $L = L_1$ và $x_0 - x_1 \in L$.

b) Nếu đa tạp tuyến tính $D = L + x_0$ thì $D = L + x$ với mọi $x \in D$.

120. Ta định nghĩa số chiều của đa tạp tuyến tính $D = L + x_0$ là số chiều của không gian con L. Chứng minh rằng :

a) Các nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính tương thích n ẩn hạng r với hệ tử thuộc một trường P lập thành một đa tạp tuyến tính của không gian vectơ P^n, có số chiều là $d = n - r$.

b) Với mọi đa tạp tuyến tính D của không gian P^n mà $\dim D = d$ tồn tại một hệ phương trình tuyến tính [illegible] hạng $r = n - d$ với hệ tử thuộc P mà tập các nghiệm trùng với đa tạp tuyến tính D đã cho.

121. Giả sử V là một không gian n chiều trên một trường P, D_1 và D_2 là hai đa tạp tuyến tính của không gian V mà $\dim D_1 = k_1$, $\dim D_2 = k_2$. Chứng minh rằng :

a) Nếu $D_1 \cap D_2 \neq \phi$ và $k_1 + k_2 > n$ thì

$$\dim (D_1 \cap D_2) \geqslant k_1 + k_2 - n.$$

b) D_1 và D_2 được chứa trong một đa tạp tuyến tính Q của V mà

$$\dim Q \leqslant k_1 + k_2 + 1$$

122. Giả sử V là một không gian vectơ trên trường số thực R.

Giả sử

$$x_0, x_1, \dots, x_k \tag{1}$$

là $k + 1$ vectơ tùy ý của không gian V.

Chứng minh rằng :

a) Tập D tất cả các vectơ dạng

$$x = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k, \tag{2}$$

trong đó các số $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ thỏa mãn điều kiện

$$\alpha_0 + \alpha_1 \dots + \alpha_k = 1 \tag{3}$$

lập thành một đa tạp tuyến tính của không gian vectơ V, chứa các vectơ $x_0, x_1, \dots, x_k$.

b) Với mọi đa tạp tuyến tính D của không gian vectơ V mà dim $D = k$ tồn tại một hệ vectơ (1) sao cho D gồm tất cả các vectơ dạng (2) thỏa mãn điều kiện (3).

123. Giả sử V là một không gian vectơ trên trường số thực hoặc trường số phức, ta nói tập con M của không gian V là một *tập lồi* nếu với mọi $x_1, x_2 \in M$ và mọi số thực α_1, α_2 mà $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant \alpha_2 \leqslant 1$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ thì vectơ $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ cũng thuộc M. Chứng minh rằng :

a) Mỗi đa tạp tuyến tính của không gian vectơ V là một tập lồi.

b) M là một tập lồi khi và chỉ khi với mọi số thực ρ, $\sigma \geqslant 0$ ta có :

$$(\rho + \sigma) M = \rho M + \sigma M.$$

c) Giao của một họ tập lồi cũng là một tập lồi.

d) Tổng của hai tập lồi cũng là một tập lồi.

124. Ta định nghĩa *bao lồi* của một tập con A của không gian vectơ V trên trường số thực hoặc trường số phức là giao của tất cả các tập lồi của V chứa A (xem bài tập trên). Chứng minh rằng bao lồi của tập các vectơ thuộc họ $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ chính là tập tất cả các vectơ dạng

$$x = \sum_{\alpha \in \Lambda} \rho_\alpha x_\alpha,$$

trong đó mọi $\rho_\alpha \geqslant 0$ và $\sum_{\alpha \in \Lambda} \rho_\alpha = 1$.

125. Ta nói tập con M của không gian vectơ V trên trường số phức là một *tập lồi tuyệt đối* nếu :

$$\lambda M + \mu M = M$$

với mọi số phức λ, μ mà $|\lambda| + |\mu| = 1$.

Chứng minh rằng :

a) Tập M là một tập lồi tuyệt đối khi và chỉ khi nó là một tập lồi và $\lambda M = M$ với mọi số phức λ mà $|\lambda| = 1$.

b) Mỗi đa tạp tuyến tính của không gian V là một tập lồi tuyệt đối khi và chỉ khi nó là một không gian con của V.

c) Giao của một họ các tập lồi tuyệt đối cũng là một tập lồi tuyệt đối.

d) Tổng của hai tập lồi tuyệt đối cũng là một tập lồi tuyệt đối.

§2. KHÔNG GIAN OCLIT VÀ KHÔNG GIAN UNITA

126. Giả sử E là một không gian unita, x và y là hai vectơ tùy ý thuộc E. Chứng minh các bất đẳng thức sau đây :

a) Bất đẳng thức Côsi — Bunhiakôpxki :

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|,$$

trong đó dấu bằng đạt được khi và chỉ khi x và y phụ thuộc tuyến tính.

b) Bất đẳng thức tam giác :

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

127. Giả sử E là một không gian unita, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ là một hệ vectơ trực chuẩn của không gian E. Chứng minh rằng :

a) Nếu $x \in E$ là một vectơ nào đó, và $\langle x, e_k \rangle = \alpha_k$ $(k = 1, 2..., m)$ thì ta có bất đẳng thức Betxen :

$$\langle x, x \rangle \geqslant |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + ... + |\alpha_m|^2.$$

b) Điều kiện ắt có và đủ để hệ vectơ trực chuẩn e_1, e_2, ... e_n là một cơ sở trực chuẩn của không gian Unita E là với mọi vectơ $x \in E$ mà $\langle x, e_i \rangle = \alpha_i$ thì

$$\langle x, x \rangle = \alpha_1\overline{\alpha_1} + \alpha_2\overline{\alpha_2} + ... + \alpha_m\overline{\alpha_m}.$$

128. Trong một không gian unita E, chứng minh rằng :

a) Mọi hệ trực giao các vectơ khác không là một hệ độc lập tuyến tính.

b) Nếu hệ vectơ x_1, x_2, ... x_m trực giao thì :

$$||x_1 + x_2 + ... + x_m||^2 =$$
$$= ||x_1||^2 + ||x_2||^2 + ... + ||x_m||^2.$$

c) Tập F^* tất cả các vectơ trực giao với mọi vectơ thuộc không gian con F của không gian E là một không gian con của không gian E(F^* gọi là *bù trực giao* của F).

d) Nếu E là một không gian hữu hạn chiều thì

$$(F^*)^* = F, E = F \oplus F^*.$$

129. Giả sử E là tập tất cả các dãy vô hạn số thực $x = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...)$ sao cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ hội tụ.

Trong E ta định nghĩa các phép toán như sau : Nếu $y = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n, ...) \in E$ và γ là một số thực tùy ý thì

$$x + y = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, ..., \alpha_n + \beta_n, ...),$$

$$\gamma x = (\gamma\alpha_1, \gamma\alpha_2, ..., \gamma\alpha_n, ...), \langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\beta_n.$$

a) Chứng minh rằng với các phép toán đó E là một không gian Ơclit vô hạn chiều.

b) Nếu F là một không gian con hữu hạn chiều của không gian E thì $E = F \oplus F^*$.

c) Tìm ví dụ một không gian con F của không gian E mà $(F^*)^* \neq F$ và $E \neq F \oplus F^*$.

130. Giả sử E_{n+1} là không gian vectơ gồm các đa thức của ẩn x với hệ số thực bậc $\leqslant n$, với phép cộng đa thức và phép nhân đa thức với số thực thông thường. Chứng minh rằng :

a) Nếu ta định nghĩa tích vô hướng trong E_{n+1} như sau :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx, \text{ với mọi } f, g \in E_{n+1}$$

thì E_{n+1} là một không gian Ơclit.

b) Các đa thức Lơgiăngđơrơ

$$P_0(x) = k,\ P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} [(x^2 - 1)^k],\ k = 1, \ldots, n,$$

lập thành một cơ sở trực giao của E_{n+1}.

c) Tìm độ dài $\| P_k(x) \|$, $k = 1, \ldots, n$.

d) Chứng minh rằng nếu ta áp dụng quá trình trực giao hóa vào cơ sở $1, x, \ldots, x^n$ của E_{n+1} thì ta được cơ sở $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)$ chỉ khác các đa thức $P_k(x)$ tương ứng những hằng số.

131. Giả sử E là một không gian Ơclit tùy ý, F là một không gian con của E và x là một vectơ đã cho thuộc không gian E.

Chứng minh rằng :

a) Điều kiện ắt có và đủ để vectơ $x_0 \in F$ là một trong những vectơ thuộc F mà $\| x - x_0 \|$ tối tiểu là vectơ $x - x_0 \in F^*$ ($x - x_0$ trực giao với mọi vectơ thuộc F).

b) Trong F không tồn tại hai vectơ x_0 và x_1 mà $\| x - x_0 \|$ và $\| x - x_1 \|$ đều tối tiểu.

c) Nếu F là một không gian con hữu hạn chiều của không gian E thì trong F tồn tại vectơ x_0 mà $\| x - x_0 \|$ là tối tiểu. Lúc đó ta gọi $\| x - x_0 \|$ là *khoảng cách* từ x tới F.

132. Giả sử E là một không gian Ơclit, trong đó đã cho một hệ vectơ độc lập tuyến tính $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

Chứng minh rằng trong không gian E tồn tại một hệ vectơ $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ thỏa mãn các điều kiện :

a) Hệ $\{y_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$ là một hệ trực chuẩn.

b) Mỗi vectơ y_n là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$y_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n,$$

trong đó $\alpha_{nn} \neq 0$.

c) Mỗi vectơ x_n là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$x_n = \beta_{n1}y_1 + \beta_{n2}y_2 + \ldots + \beta_{nn}y_n,$$

trong đó $\beta_{nn} \neq 0$.

133. Hai cơ sở $e_1, e_2, \ldots, e_n$ và $f_1, f_2, \ldots, f_n$ của một không gian Unita n chiều được gọi là hai *cơ sở tương hỗ* nếu $\langle e_i, f_j \rangle = \delta_{ij}$ (dấu Krônecke).

a) Chứng minh rằng với mỗi cơ sở $e_1, \ldots, e_n$ của một không gian unita n chiều tồn tại duy nhất một cơ sở tương hỗ $f_1, \ldots, f_n$ trong không gian đó.

b) Giả sử S là ma trận chuyển từ cơ sở $e_1, \ldots, e_n$ tới cơ sở $e'_1, \ldots, e'_n$. Tìm ma trận chuyển T từ cơ sở $f_1, \ldots, f_n$

tương hỗ của $e_1, \ldots, e_n$ tới cơ sở $f_1', \ldots, f_n'$ tương hỗ của $e_1', \ldots, e_n'$.

134. Giả sử E là một không gian Ơclit, x và y là hai vectơ khác không của E. Ta định nghĩa *góc giữa* hai vectơ x và y là góc $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ mà

$$\cos\varphi = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Chứng minh rằng:

a) $x = \alpha y$, trong đó $\alpha > 0$ khi và chỉ khi góc giữa x và y bằng 0.

b) $x = \alpha y$, trong đó $\alpha < 0$ khi và chỉ khi góc giữa x và y bằng π.

c) Nếu $x \neq 0$ là một vectơ thuộc E và F là một không gian con hữu hạn chiều của không gian Ơclit E thì trong F tồn tại duy nhất một vectơ y sao cho trong các góc từ x tới các vectơ thuộc F thì góc giữa x và y là bé nhất.

135. Ta định nghĩa *định thức Gram* của hệ vectơ $x_1, x_2, \ldots, x_k$ trong một không gian Unita E là định thức

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_1, x_2\rangle & \ldots & \langle x_1, x_k\rangle \\ \langle x_2, x_1\rangle & \langle x_2, x_2\rangle & \ldots & \langle x_2, x_k\rangle \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \langle x_k, x_1\rangle & \langle x_k, x_2\rangle & \ldots & \langle x_k, x_k\rangle \end{vmatrix}.$$

Chứng minh rằng:

a) $G(x_1, x_2, \ldots, x_k) \geqslant 0$ và $G(x_1, \ldots, x_k) = 0$ khi và chỉ khi hệ $x_1, \ldots, x_k$ phụ thuộc tuyến tính.

b) Định thức Gram không thay đổi khi trực giao hóa các vectơ $x_1, \ldots, x_k$ nghĩa là nếu áp dụng quá trình trực giao hóa vào các vectơ $x_1, \ldots, x_k$ ta được hệ vectơ $y_1, \ldots, y_k$ thì

$$G(x_1, \ldots, x_k) = G(y_1, \ldots, y_k) = \langle y_1, y_1\rangle \langle y_2, y_2\rangle \ldots \langle y_k, y_k\rangle.$$

c) Nếu $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l$ là một hệ vectơ của không gian Unita E thì

$$G(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l) \leqslant G(x_1, \dots, x_k) . G(y_1, \dots, y_l),$$

trong đó dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hoặc $\langle x_i, y_j \rangle = 0$ ($i = 1, \dots, k$; $j = 1, \dots, l$) hoặc ít nhất một trong hai hệ $x_1, \dots, x_k$ và $y_1, \dots, y_l$ phụ thuộc tuyến tính.

136. Giả sử E là một không gian Ơclit, F là một không gian con hữu hạn chiều của E và $D = F + x_0$, $x_0 \in E$ là một đa tạp tuyến tính của E. Chứng minh rằng :

a) Với mỗi vectơ $x \in E$ tồn tại duy nhất một vectơ $u \in D$ sao cho khoảng cách $\| x - u \|$ là bé nhất so với các khoảng cách $\| x - v \|$, $v \in D$. Khoảng cách $d = \| x - u \|$ đó gọi là *khoảng cách* từ x tới đa tạp D.

b) Nếu $e_1, e_2, \dots, e_k$ là một cơ sở của không gian con F thì khoảng cách d từ x tới đa tạp $D = F + x_0$ được tính theo công thức

$$d^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_k, x - x_0)}{G(e_1, \dots, e_k)},$$

trong đó $G(e_1, \dots, e_k)$ là định thức Gram của hệ vectơ $e_1, \dots, e_k$.

137. Cho E là không gian vectơ mà các vectơ là các hàm số thực liên tục trên đoạn $[0, 2\pi]$, với phép cộng hàm số và phép nhân hàm số với số thực theo định nghĩa thông thường. Chứng minh rằng :

a) Trong không gian E ta có thể định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ $f(x)$, $g(x)$ là

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx$$

để biến E thành một không gian Ơclit.

(n, m là các số nguyên dương tùy ý) lập thành một hệ trực giao, do đó E là một không gian vô hạn chiều.

c) Tập F tất cả các hàm $f(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx$ là một không gian con của không gian E, có số chiều bằng $2n + 1$. Tìm một cơ sở trực chuẩn của F.

138. Giả sử E là một không gian vectơ trên trường số thực E được gọi là một *không gian định chuẩn* nếu mỗi vectơ $x \in E$ được đặt tương ứng với một số thực gọi là chuẩn của x và ký hiệu là $\| x \|$, thỏa mãn các điều kiện :

1. $\| x \| \geqslant 0$, và $\| x \| = 0$ chỉ khi $x = 0$
2. $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$, với mọi $x, y \in E$.
3. $\| \alpha x \| = | \alpha | . \| x \|$, với mọi số thực α.

Chứng minh rằng trong một không gian định chuẩn E ta có thể định nghĩa được một tích vô hướng để cho E trở thành một không gian Ơclit có chuẩn trùng với chuẩn đã cho khi và chỉ khi chuẩn trong E thỏa mãn điều kiện :

$$\| x + y\|^2 + \| x - y\|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2).$$

139. Hai không gian Ơclit E và F được gọi là *đẳng cấu* nếu tồn tại một song ánh $\varphi : E \to F$ thỏa mãn các điều kiện :

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y),$$
$$\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x),$$
$$\langle x, y \rangle = \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle$$

với mọi x, $y \in E$, và mọi số thực α. Chứng minh rằng :

a) Hai không gian Ơclit hữu hạn chiều là đẳng cấu khi và chỉ khi số chiều của chúng bằng nhau.

b) Hai không gian Ơclit cùng có cơ sở đếm được thì đẳng cấu với nhau.

140. Giả sử M là một môđun trên một vành A. Chứng minh rằng :

a) Tập $S \subset M$ là một tập độc lập tuyến tính khi và chỉ khi mọi tập con hữu hạn của S độc lập tuyến tính.

b) Nếu S là một tập độc lập tuyến tính thì không có phần tử x nào của S là tổ hợp tuyến tính của tập $S \setminus \{x\}$, nhưng điều ngược lại không đúng.

c) Nếu B là một vành con của vành A thì M cũng là một môđun trên B ; và mỗi tập $S \subset M$ độc lập tuyến tính trên A (tức là độc lập tuyến tính trong môđun M trên vành A) cũng là tập độc lập tuyến tính trên B nhưng ngược lại không đúng.

141. Giả sử M là một môđun tự do trên một vành A với cơ sở là $\{x_i\}_{i \in I}$; M' là một môđun trên A, và $\{y_i\}_{i \in I}$ là một họ phần tử tùy ý thuộc M'. Chứng minh rằng :

a) Tồn tại duy nhất một đồng cấu $\varphi : M \to M'$ sao cho $\varphi(x_i) = y_i$ với mọi $i \in I$.

b) Hai môđun tự do trên cùng một vành A mà cơ sở có cùng lực lượng thì đẳng cấu với nhau.

142. Chứng minh rằng :

a) Tồn tại những môđun không có cơ sở.

b) Một môđun tự do trên một vành A có thể chứa những phần tử $x \neq 0$ mà tập $\{x\}$ không độc lập tuyến tính.

143. Chứng minh rằng :

a) Môđun con của một môđun xiclic nói chung không phải là một môđun xiclic.

b) Nếu M là một môđun xiclic trên vành số nguyên Z thì mọi môđun con của môđun M cũng là môđun xiclic.

144. Giả sử M là một môđun trên một vành A và x là một phần tử thuộc M. Ta định nghĩa *cấp* $0(x)$ của phần tử x là tập tất cả các phần tử $a \in A$ mà $ax = 0$. Chứng minh rằng :

a) Nếu (x) và (y) là các môđun xiclic sinh bởi $x, y \in M$ và $(x) = (y)$ thì $0(x) = 0(y)$.

b) Điều kiện $0(x) = 0(y)$ không đủ để $(x) = (y)$.

c) $0(x)$ là một iđêan của vành A và nếu xem $A/0(x)$ như một môđun trên vành A thì môđun xiclic (x) đẳng cấu với môđun $A/0(x)$.

145. Giả sử M là một môđun trên một vành A, M_1 và M_2 là hai môđun con của M. Ta nói M là *tổng trực tiếp* của các môđun con M_1 và M_2 và viết $M = M_1 \oplus M_2$ nếu mọi $x \in M$ viết được một cách duy nhất dưới dạng.

$$x = x_1 + x_2, \; x_1 \in M_1, \; x_2 \in M_2.$$

Lúc đó ta gọi M_1 và M_2 là các *hạng tử trực tiếp* của môđun M.

Chứng minh rằng :

a) Môđun M là tổng trực tiếp của các môđun con M_1 và M_2 khi và chỉ khi $M_1 + M_2 = M$ và $M_1 \cap M_2 = \{0\}$.

b) Nếu $M = M_1 \oplus M_2$ thì M_1 đẳng cấu với M/M_2

c) Nếu M_1 là một môđun con của môđun M sao cho môđun thương M/M_1 là một môđun tự do với cơ sở $(\overline{x_i})_{i \in I}$, và nếu trong mỗi lớp $\overline{x_i}$ ta chọn một phần tử y_i tùy ý thì họ $(y_i)_{i \in I}$ độc lập tuyến tính trong M, và $M = M_1 \oplus M_2$, trong đó M_2 là môđun con sinh bởi họ $(y_i)_{i \in I}$.

146. Ta xem vành số nguyên **Z** như một môđun trên chính nó. Chứng minh rằng trong môđun đó mọi môđun con khác 0 và khác **Z** đều không phải là hạng tử trực tiếp.

147. Môđun M trên một vành A được gọi là *môđun đơn* nếu $M \neq \{0\}$ và M không chứa môđun con nào khác $\{0\}$ và khác M. Chứng minh rằng nếu M là một môđun đơn trên một vành A thì :

a) hoặc $aM = \{0\}$ với mỗi $a \in A$ và M gồm có p phần tử, trong đó p là một số nguyên tố ;

b) hoặc $M = Ax$ với mỗi $x \neq 0$ thuộc M.

148. Giả sử M và N là hai môđun đơn trên một vành A. Chứng minh rằng mỗi đồng cấu khác đồng cấu không từ môđun M tới môđun N đều là một đẳng cấu.

149. Môđun M trên một vành A được gọi là một *môđun nửa đơn*, nếu mỗi môđun con của M đều là hạng tử trực tiếp.

Chứng minh rằng :

a) Mỗi không gian vectơ trên một trường P là một môđun nửa đơn trên P.

b) Mọi môđun con của một môđun nửa đơn là một môđun nửa đơn.

c) Mỗi môđun con khác không của một môđun nửa đơn chứa một môđun con đơn.

d) Mỗi môđun nửa đơn là tổng trực tiếp của các môđun con đơn của nó.

150. Môđun M trên một vành được gọi là một *môđun hữu hạn sinh* nếu M có một tập sinh gồm một số hữu hạn phần tử.

Chứng minh rằng :

a) Môđun con của một môđun hữu hạn sinh có thể không phải là môđun hữu hạn sinh.

b) Nếu N là một môđun hữu hạn sinh của một môđun M và môđun thương M/N cũng là một môđun hữu hạn sinh thì M là một môđun hữu hạn sinh.

151. Giả sử M là một môđun trên một vành A. Chứng minh rằng các điều kiện sau đây là tương đương :

a) Mọi môđun con của môđun M đều là môđun hữu hạn sinh.

b) Nếu $M_1, M_2, \ldots$ là các môđun con của môđun M sao cho

$$M_1 \subseteq M_2 \subset \ldots$$

thì tồn tại một chỉ số n sao cho $M_n = M_{n+1} = \ldots$

c) Mọi tập $S \neq \phi$ các môđun con của M đều chứa một phần tử tối đại (tức là chứa một môđun con M_0 sao cho với mọi $N \in S$ mà $M_0 \subset N$ suy ra $M_0 = N$).

152. Phần tử x thuộc một môđun M trên một vành A được gọi là một *phần tử tuần hoàn* nếu cấp $0(x) \neq 0$ (xem bài **144**).

a) Chứng minh rằng nếu A là một vành giao hoán và không chứa ước của không, thì tập tất cả các phần tử tuần hoàn của M là một môđun con của môđun M.

b) Tìm ví dụ một vành giao hoán A có chứa ước của không sao cho điều khẳng định trong câu a) không đúng.

153. Giả sử M_1 và M_2 là hai môđun con của môđun M. Chứng minh rằng:

a) Môđun thương $M_1 / M_1 \cap M_2$ đẳng cấu với môđun thương $(M_1 + M_2) / M_2$.

b) Nếu $M_1 \subset M_2 \subset M$ thì $(M/M_1)/(M_2/M_1)$ đẳng cấu với M/M_2.

154. Giả sử M, M' và M'' là ba môđun trên cùng một vành A. Giả sử f là một đơn cấu từ M' tới M'' và g là một toàn cấu từ M tới M'' sao cho $\mathrm{Im}f = \mathrm{Ker}g$. Ký hiệu ε_M là ánh xạ đồng nhất trên M.

Chứng minh rằng:

a) Tồn tại một đồng cấu $\varphi : M'' \to M$ sao cho $g\varphi = \varepsilon_{M''}$ khi và chỉ khi tồn tại một đồng cấu $\psi : M \to M'$ sao cho $\psi f = \varepsilon_{M'}$.

b) Nếu thỏa mãn các điều kiện trong câu a) thì ta có

$$M = \mathrm{Im}f \oplus \mathrm{Ker}\psi = \mathrm{Ker}g \oplus \mathrm{Im}\varphi.$$

CHƯƠNG V

ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH VÀ MA TRẬN

Cho hai không gian vectơ E và F trên cùng một trường P. Ánh xạ $f: E \to F$ được gọi là một *ánh xạ tuyến tính* hoặc một *đồng cấu* nếu với mọi $x, y \in E$ và mọi $\alpha \in P$, ta có

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$
$$f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

Nếu F trùng với E thì f được gọi là một *phép biến đổi tuyến tính* hoặc một *tự đồng cấu* của không gian E.

Nếu ngoài ra f là một toàn ánh, đơn ánh hoặc song ánh thì ánh xạ tuyến tính f được gọi tương ứng là một toàn cấu, đơn cấu hoặc đẳng cấu.

Ta định nghĩa *hạt nhân* $\mathrm{Ker}f$ của một ánh xạ tuyến tính $f: E \to F$ là

$$\mathrm{Ker}f = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$$

còn $\mathrm{Im}f = f(E)$.

Hạng của ánh xạ tuyến tính $f: E \to F$ được định nghĩa là $\dim \mathrm{Im}f = \dim f(E)$, và ký hiệu là $\mathrm{rank}\, f$, còn *số khuyết* của f ký hiệu là $\mathrm{def}\, f$ được định nghĩa là $\dim \mathrm{Ker}f$.

Ký hiệu Hom (E, F) là tập tất cả các ánh xạ tuyến tính từ E tới F. Với $f, g \in$ Hom (E, F) ta định nghĩa $f + g$ và λf, $\lambda \in P$ như sau: với $x \in E$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Thế thì $f + g$ và $\lambda f \in$ Hom (E, F) và Hom (E, F) là một không gian vectơ trên P.

Nếu G cũng là một không gian vectơ trên P, và $\varphi \in \mathrm{Hom}(E, F)$, $\psi \in \mathrm{Hom}(F, G)$ thì ta định nghĩa $\psi\varphi$ là ánh xạ từ E tới G mà:

$$(\psi\varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) \text{ với mọi } x \in E.$$

Thế thì $\psi\varphi \in \mathrm{Hom}(E, G)$

Nếu P xem là một không gian tuyến tính trên chính nó thì mỗi $f \in \mathrm{Hom}(E, P)$ được gọi là một *hàm tuyến tính* hay một *dạng tuyến tính* trên E, và không gian vectơ $E^* = \mathrm{Hom}(E, P)$ được gọi là *không gian liên hợp* hoặc *không gian đối ngẫu* của không gian E. Giả sử $f \in \mathrm{Hom}(E, F)$ và $\dim E = n$, $\dim F = m$. Trong E chọn một cơ sở $x_1, x_2, \ldots, x_n$ và trong F chọn một cơ sở $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Thế thì

$$f(x_i) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} y_j, \ \alpha_{ij} \in P, \ i = 1, \ldots, n.$$

Ma trận $A = [\alpha_{ji}]$ gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính f đối với cặp cơ sở $x_1, \ldots, x_n$ và $y_1, \ldots y_m$.

§ 1. ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH CỦA CÁC KHÔNG GIAN VECTƠ TÙY Ý

155. Cho ánh xạ f từ không gian $\mathbf{R}^3$ các bộ ba số thực tới chính nó sao cho

$$f(x, y, z) = ((a+1)x + y + z, \ x + (a+1)y + z, \ x + y + (a+1)z),$$

trong đó a là một số thực nào đó.

a) Chứng tỏ rằng f là một ánh ánh xạ tuyến tính.

b) Với giá trị nào của a thì f không suy biến (tức $\mathrm{rank} f = 3$) và với giá trị nào của a thì f suy biến?

c) Khi f suy biến, tìm Ker$f$ và Imf.

156 Cho ánh xạ f từ không gian $\mathbf{R}^4$ tới không gian R đặt tương ứng vectơ $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbf{R}^4$ với vect $f(x) \in \mathbf{R}^3$ như sau :

$$f(x) = (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_4, \alpha_3 + 2\alpha_2 - \alpha_4).$$

a) Chứng tỏ rằng f là một ánh xạ tuyế . tính và tì ma trận của f đối với cặp cơ sở $u_i \in \mathbf{R}^4$ và $v_j \in \mathbf{R}^3$ sau đây

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 1, 1, 1) & v_1 &= (1, 1, 1) \\ u_2 &= (0, 1, 1, 1) & v_2 &= (1, 1, 0) \\ u_3 &= (0, 0, 1, 1) & v_3 &= (1, 0, 0) \\ u_4 &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

b) Tìm rank f và def f.

157. Phép biến đổi tuyến tính f đối với không gian chiều V trên trường số thực đối với một cơ sở e_1, e_2, e e_4 của V có ma trận là

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 11 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Tìm Ker$f$ và Imf, rank$f$ và def f.

b) Tìm ma trận A của f đối với cơ sở

$$u_1 = e_1, \; u_2 = e_1 + e_2, \; u_3 = e_1 + e_2 + e_3,$$
$$u_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4.$$

158. Giả sử f là một phép biến đổi tuyến tính củ một không gian hữu hạn chiều V trên một trường P, là một không gian con của V. Chứng minh rằng :

a) rank$f$ + def f = dim V.

b) Ảnh $f(L)$ và tạo ảnh toàn phần $f^{-1}(L)$ của khôr gian con L là các không gian con của V.

c) $\dim L - \operatorname{def} f \leqslant \dim f(L) \leqslant \dim L$.

d) $\dim L \leqslant \dim f^{-1}(L) \leqslant \dim L + \operatorname{def} f$.

e) f là một tự đẳng cấu của V khi và chỉ khi f thỏa mãn một trong các điều kiện : (i) $\operatorname{rank} f = \dim V$, (ii) $\operatorname{def} f = 0$, (iii) f là một đơn cấu, (iv) f là một toàn cấu.

159. Giả sử f là một phép biến đổi tuyến tính của một không gian vectơ V. Chứng minh rằng :

a) $f(V) = V$ khi và chỉ khi không tồn tại phép biến đổi tuyến tính $g \neq 0$ của V sao cho $gf = 0$.

b) Nếu V là một không gian hữu hạn chiều và tồn tại phép biến đổi tuyến tính g của V sao cho fg là phép biến đổi đồng nhất của V thì f và g là hai tự đẳng cấu đẳng cấu ngược nhau của V.

160 Giả sử V là một không gian vectơ có cơ sở vô hạn đếm được $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ trên một trường P. Chứng minh rằng :

a) Phép biến đổi tuyến tính f của V xác định bởi $f(x_{2n-1}) = 0$, $f(x_{2n}) = x_n$ với mọi $n = 1, 2, \ldots$ là một toàn cấu từ V lên V nhưng không phải là một tự đẳng cấu của V.

b) Tồn tại một đơn cấu g từ V tới V sao cho $g(V) \neq V$ mà fg là ánh xạ đồng nhất trên V.

161. Xét tập V các hàm x xác định trên trường số thực $\mathbf{R}$ bởi đẳng thức

$$x(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt),$$

trong đó n là một số tự nhiên đã cho, $\alpha_k, \beta_k \in \mathbf{R}$.

a) Chứng tỏ rằng V là một không gian vectơ trên $\mathbf{R}$ và tìm $\dim V$.

b) Giả sử f là ánh xạ từ V tới V đặt tương ứng mỗi phần tử $x \in V$ với phần tử $y = f(x)$ có dạng $y(t) = x\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$. Chứng tỏ rằng f là một ánh xạ tuyến tính và f^8 là ánh xạ đồng nhất của V.

c) Tìm Ker$f$ và Imf.

162. Giả sử V là một không gian vectơ, L là một không gian con của không gian V. Chứng minh rằng :

a) Tồn tại một phép biến đổi tuyến tính f của không gian V mà Im$f = L$.

b) Tồn tại một phép biến đổi tuyến tính g của không gian V mà Ker$g = L$.

163. Giả sử f là một ánh xạ tuyến tính từ không gian m chiều E tới không gian n chiều F trên cùng một trường P, và $H =$ Ker$f$. Chứng minh rằng :

a) Nếu L là một không gian con của E mà $\dim L = p$ và $\dim (L \cap H) = q$ thì $\dim f(L) = p - q$.

b) Nếu M là một không gian con của F mà $\dim (M \cap f(E)) = r$ thì $\dim f^{-1}(M) = r + m - \operatorname{rank} f$.

164. Giả sử u, v là các phép biến đổi tuyến tính của một không gian vectơ V. Chứng minh rằng :

$\operatorname{rank}(u + v) \leqslant \operatorname{rank} u + \operatorname{rank} v$,

$\operatorname{rank}(u, v) \leqslant \min(\operatorname{rank} u, \operatorname{rank} v)$,

$\operatorname{def}(uv) \leqslant \operatorname{def} u + \operatorname{def} v$.

165. Giả sử E, F, G là các không gian vectơ hữu hạn chiều trên một trường P, $u : E \to F$, $v : F \to G$ là các ánh xạ tuyến tính. Chứng minh rằng :

$$\dim (u(E) \cap \operatorname{Ker} v) = \operatorname{rank} u - \operatorname{rank}(uv),$$

và từ đó suy ra rằng nếu $\dim F = n$ thì $\max(0, \operatorname{rank} u + \operatorname{rank} v - n) \leqslant \operatorname{rank}(vu) \leqslant \min(\operatorname{rank} u, \operatorname{rank} v)$.

166. Giả sử E là một không gian vectơ trên một trường P, u và v là các phép biến đổi tuyến tính của E sao cho $\operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker} u$.

a) Chứng tỏ rằng tồn tại phép biến đổi tuyến tính w của E sao cho $u = w\, v$.

b) Giả sử E là không gian xét trong hình học sơ cấp gồm các vectơ trong không gian 3 chiều xuất phát từ gốc tọa độ 0. Ta định nghĩa u là phép chiếu mỗi vectơ lên một mặt phẳng P đi qua 0 và v là phép chiếu mỗi vectơ lên đường thẳng d đi qua 0 và nằm trong mặt phẳng P. Xét cái thu hẹp của w trên mặt phẳng P, hãy chỉ ra rằng từ đó ta đi tới định lý nào trong hình học sơ cấp.

167. Giả sử φ là một phép biến đổi tuyến tính của không gian vectơ V trên một trường P. Giả sử $X = \operatorname{Ker} \varphi^{i-2}$, $Y = \operatorname{Ker} \varphi^{i-1}$, $Z = \operatorname{Ker} \varphi^{i}$, $W = \operatorname{Ker} \varphi^{i+1}$. Chứng minh rằng :

a) $Z \subset W$ và $\varphi(W) \subset Z$.

b) Nếu $\{u_1, \ldots, u_r\}$, $\{v_1, \ldots, v_s\}$ và $\{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_t\}$ là các cơ sở của X, Y, Z tương ứng thì $S = \{u_1, \ldots, u_r, \varphi(w_1), \ldots, \varphi(w_t)\}$ là một tập độc lập tuyến tính và được chứa trong Y.

168. Giả sử V_{n+1} là không gian các đa thức của x với hệ số phức bậc $\leqslant n$. Xét các đa thức $u_k(x)$, $0 \leqslant k \leqslant n$, như sau :

$$u_0 = 1,\ u_k(x) = x(x-1)\ldots(x-k+1) \text{ nếu } k > 0.$$

a) Chứng tỏ rằng tồn tại duy nhất một phép biến đổi tuyến tính ψ của V_{n+1} thỏa mãn các điều kiện

$$\psi(x^k) = u_k(x),\ k = 0, 1, \ldots, n$$

và ψ đó là một tự đẳng cấu.

b) Xác định ánh xạ $\varphi : V_{n+1} \to V_{n+1}$ như sau : với mỗi đa thức $y \in V_{n+1}$ ta đặt

$$[\varphi(y)](x) = y(x+1) - y(x).$$

Chứng tỏ rằng φ là một phép biến đổi tuyến tính. Tìm Kerφ và Imφ.

c) Hãy xác định xem ánh xạ tuyến tính $d = \psi^{-1}\varphi\psi$ là ánh xạ nào.

169. Giả sử V là không gian tất cả các đa thức của x với hệ số phức, $f(x)$ là một đa thức đã cho bậc r, V_{n+1} là không gian con của V gồm những đa thức bậc $\leqslant n$. Xét ánh xạ $\varphi : V \to V$ đặt tương ứng mỗi đa thức $g(x) \in V$ với đa thức

$$\varphi(g) = fg' - f'g,$$

trong đó f', g' là đạo hàm của f và g tương ứng.

a) Chứng tỏ rằng φ là một phép biến đổi tuyến tính của V. Tìm Ker φ và chứng tỏ rằng $\varphi(V_{r+1}) = \varphi(V_r)$.

b) Giả sử $\overline{\varphi}$ là ánh xạ thu hẹp của φ trên V_{n+1}. Tìm rank $\overline{\varphi}$.

c) Ký hiệu $F_{p+1} = V_{p+1} \cap \varphi(V)$. Chứng tỏ rằng

$$F_{p+1} = \begin{cases} \varphi(V_{p-r+2}) & \text{nếu } p \geqslant r - 1, \\ \{0\} & \text{nếu } p < r - 1. \end{cases}$$

Tìm dim F_{p+1}

170. Giả sử V là một không gian vectơ trên trường số thực, và $V = L \oplus M$ là tổng trực tiếp của hai không gian con L và M của nó. Khi đó mỗi vectơ $x \in V$ biểu diễn duy nhất dưới dạng $x = y + z$, $y \in L$, $z \in M$. Ánh xạ tuyến tính $f : V \to V$ mà $f(x) = y$ được gọi là phép chiếu của V lên L song song với M. Chứng minh rằng :

a) Nếu f là phép chiếu lên L song song với M và ε là phép biến đổi đồng nhất thì $\varepsilon - f$ là phép chiếu lên M song song với L.

b) Muốn cho tổng $f = f_1 + f_2$ của hai phép chiếu f_1 và f_2 là một phép chiếu thì ắt có và ắt đủ là

$$f_1 f_2 = f_2 f_1 = \omega. \qquad (1)$$

trong đó ω là ánh xạ không. Nếu f_1 và f_2 tương ứng là phép chiếu lên L_1 song song với M_1 và phép chiếu lên L_2 song song với M_2 và điều kiện (1) thỏa mãn thì $f = f_1 + f_2$ là phép chiếu lên $L = L_1 \oplus L_2$ song song với $M = M_1 \cap M_2$.

c) Muốn cho hiệu $g = f_1 - f_2$ của hai phép chiếu f_1 và f_2 là một phép chiếu thì ắt có và đủ là

$$f_1 f_2 = f_2 f_1 = f_2, \tag{2}$$

và lúc đó g là phép chiếu lên $L' = L_1 \cap M_2$ song song với $M' = M_1 \oplus L_2$.

d) Muốn cho tích $h = f_1 f_2$ của hai phép chiếu f_1 và f_2 là một phép chiếu thì điều kiện đủ là

$$f_1 f_2 = f_2 f_1, \tag{3}$$

và lúc đó h là phép chiếu lên $L'' = L_1 \cap L_2$ song song với $M'' = M_1 + M_2$. Chứng tỏ rằng (3) không phải là điều kiện ắt có để h là một phép chiếu.

§2. MA TRẬN

171. Cho ma trận vuông cấp hai trên trường số phức

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

và giả sử $\beta \neq 0$.

a) Chứng minh rằng điều kiện ắt có và đủ để ma trận trên trường số phức

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

giao hoán với A (tức là $AB = BA$) là tồn tại một số phức k sao cho $y = k\beta$, $z = k\gamma$, $x - t = k(\alpha - \delta)$.

b) Chứng tỏ rằng tập tất cả các ma trận trên trường số phức giao hoán với ma trận A lập thành một không gian vecto hai chiều trên trường số phức.

172. Cho các ma trận vuông cấp n trên một trường P:

$$T_{ij}(a) = I + aI_{ij}, \; D_i(b) = I + (b-1)I_{ii}$$

trong đó $a, b \in P$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $i \neq j$, I là ma trận đơn vị và I_{ij} là ma trận có 1 tại giao của dòng i cột j còn các chỗ khác bằng 0. Chứng minh rằng:

a) $T_{ij}^{-1}(a)\, T_{jk}^{-1}(b)\, T_{ij}(a)\, T_{jk}(b) = T_{ik}(ab)$

với i, j, k khác nhau từng đôi một.

b) Mỗi ma trận vuông cấp n trên P biểu diễn được dưới dạng $C_1 \dots C_r D_n(b) C_{r+1} \dots C_s$, trong đó C_k là ácc ma trận T_{ij} với i, j nào đó.

173. Ta định nghĩa phép biến đổi sơ cấp của một ma trận A trên một trường P là phép biến đổi thuộc một trong các dạng sau:

(a) Cộng vào một dòng (cột) một dòng (cột) khác đã nhân với một phần tử $a \in P$.

(b) Nhân một dòng (cột) với một phần tử $b \in P$, $b \neq 0$.

(c) Đổi chỗ hai dòng (cột).

Chứng minh rằng có thể thu được các phép biến đổi sơ cấp của A bằng cách nhân bên trái hoặc bên phải A với các ma trận $T_{ij}(a)$ và $D_i(b)$ trong bài tập trên.

174. Cho A và B là các ma trận vuông cùng cấp trên trường số thực. Ta định nghĩa *vết* của A là tổng các phần tử nằm trên đường chéo chính của ma trận A và ký hiệu là $v(A)$.

Chứng minh rằng:

a) $v(AB) = v(BA)$.

b) Đẳng thức

$$AB - BA = I$$

không thỏa mãn với bất kỳ ma trận A, B nào.

175. Chứng minh rằng nếu chỉ thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên các dòng (hoặc chỉ trên các cột) của một ma trận không suy biến A có thể đưa nó về ma trận đơn vị I, còn nếu áp dụng những phép biến đổi sơ cấp trên A đó vào ma trận I (theo đúng thứ tự ta đã thực hiện chúng trên A) thì ta sẽ được ma trận A^{-1} là ma trận nghịch đảo của A.

176. Dùng phương pháp trong bài trên để tìm nghịch đảo của các ma trận :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & 13 \\ -1 & 0 & 5 & 7 \\ -1 & -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 \ldots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 \ldots & n-3 & n-2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

177. Giả sử A là một ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng :

a) Điều kiện ắt có và đủ để tồn tại ma trận $B \neq D$ sao cho $AB = 0$ là ma trận A suy biến (tức là $|A| = 0$).

b) A giao hoán với mọi ma trận vuông cấp n khi và chỉ khi A là ma trận vô hướng, tức là $A = aI$.

178. Ta định nghĩa hạng của ma trận A, ký hiệu là r_A, là số các cột độc lập tuyến tính tối đại của A.

a) Chứng minh rằng hạng của A bằng cấp cao nhất của các định thức con khác không của A.

b) Nếu ánh xạ tuyến tính $f : E \to F$ đối với một cặp cơ sở nào đó của các không gian hữu hạn chiều có ma trận là A thì rank $f = r_A$.

c) Nếu A và B là hai ma trận cùng cấp, $C = A + B$ thì $r_C \leqslant r_A + r_B$.

d) Chứng minh rằng ma trận A hạng r có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của r ma trận hạng 1 nhưng không biểu diễn được dưới dạng tổng của ít hơn r ma trận như vậy.

179. Chứng minh rằng :

a) Nếu $A = BC$ thì $r_A \leqslant \min(r_B, r_C)$.

b) Nếu A là một ma trận cỡ $m \times n$ thì $r_A = r$ khi và chỉ khi $A = BC$, trong đó B là ma trận cỡ $m \times r$, C là ma trận cỡ $r \times n$ và $r_B = r_C = r$.

c) Ma trận vuông A cấp n mà $r_A = r$ biểu diễn được dưới dạng $A = PR$, trong đó P là ma trận vuông không suy biến, R là ma trận tam giác mà r phần tử đầu của đường chéo chính bằng 1 còn những phần tử dưới đường chéo chính và những phần tử của $n-r$ dòng cuối bằng 0.

180. Giả sử A là một ma trận vuông cấp n.

a) Chứng minh rằng nếu B là một ma trận vuông cấp n sao cho $AB = 0$ thì $r_A + r_B \leqslant n$, và có thể chọn ma trận B sao cho $r_A + r_B = k$ với k tùy ý thỏa mãn $r_A \leqslant k \leqslant n$.

b) Nếu $A^2 = I$ thì $r_{I+A} + r_{I-A} = n$.

181. Cho ma trận vuông A cấp $n > 1$. Ta định nghĩa ma trận $\widehat{A}$ *liên kết* với ma trận A là ma trận mà phần tử ở dòng i cột j là phần bù đại số của phần tử nằm ở dòng j cột i của A.

a) Hãy xét xem khi r_A thay đổi từ 0 tới n thì $r_{\widehat{A}}$ thay đổi như thế nào ?

b) Chứng minh rằng : $A\widehat{A} = \widehat{A}A = |A| I$.

$$\widehat{(\widehat{A})} = |A|^{n-2}A \text{ nếu } n > 2,$$

$$\widehat{(\widehat{A})} = A \text{ nếu } n = 2.$$

182. Hai ma trận A và B cùng cỡ $m \times n$ được gọi là *tương đương* nếu tồn tại các ma trận vuông không suy biến P cấp m và Q cấp n sao cho $B = PAQ$. Chứng minh rằng :

a) Khi thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận A ta được một ma trận tương đương với A.

b) Hai ma trận cùng cỡ tương đương khi và chỉ khi chúng có cùng hạng.

183. Ma trận $A = [a_{ij}]$ vuông cấp n được gọi là *ma trận đối xứng* nếu $a_{ji} = a_{ij}$, và được gọi là *ma trận phản đối xứng* nếu $a_{ij} = -a_{ji}$. Chứng minh rằng :

a) Mọi ma trận vuông A biểu diễn được một cách duy nhất dưới dạng $A = B + C$, trong đó B là ma trận đối xứng, C là ma trận phản đối xứng.

b) Hạng của một ma trận đối xứng hoặc phản đối xứng bằng cấp cao nhất của các định thức con chính khác 0 của nó (định thức con chính là định thức con lập nên từ các dòng và các cột với chỉ số giống nhau).

c) Hạng của một ma trận phản đối xứng là một số chẵn.

184. Giả sử A và B là các ma trận đối xứng cùng cấp. Chứng minh rằng :

a) Tích AB là ma trận đối xứng khi và chỉ khi $AB = BA$.

b) Ma trận $C = ABAB \ldots ABA$ là ma trận đối xứng.

c) Nếu A không suy biến thì A^{-1} cũng là ma trận đối xứng.

185. Giả sử A và B là các ma trận phản đối xứng cùng cấp. Chứng minh rằng :

a) Tích AB là ma trận phản đối xứng khi và chỉ khi $AB = -BA$.

b) Tích AB là ma trận đối xứng khi và chỉ khi $AB = BA$.

c) Nếu A không suy biến thì A^{-1} cũng là ma trận phản đối xứng.

186. Ma trận vuông $A = [a_{ij}]$ cấp n với phần tử là những số thực được gọi là *ma trận trực giao* nếu $AA' = I$, trong đó A' là ma trận chuyển vị của A. I là ma trận đơn vị. Chứng minh rằng : A là ma trận trực giao khi và chỉ khi A thỏa mãn một trong các điều kiện sau :

a) $$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, a_{kj} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } i = j \\ 0 \text{ nếu } i \neq j. \end{cases}$$

δ_{ij} được gọi là ký hiệu Krônecke.

b) $$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, a_{jk} = \delta_{ij}.$$

c) $|A| = \pm 1$ và mỗi phần tử của A bằng phần bù đại số của nó nếu $|A| = 1$ và ngược dấu nếu $|A| = -1$

d) Nếu $n \geqslant 3$, $A \neq 0$ và mỗi phần tử của A bằng phần bù đại số của nó.

e) Nếu $n \geqslant 3$, $A \neq 0$ và mỗi phần tử của A là một số thực trái dấu với phần bù đại số của nó.

187. Ma trận vuông $A = [a_{ij}]$ cấp n với phần tử là những số phức được gọi là *ma trận unita* nếu $A\overline{A}' = I$, trong đó $\overline{A} = [\overline{a}_{ij}]$. Chứng minh rằng A là ma trận unita khi và chỉ khi thỏa mãn một trong các điều kiện :

a) $$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, \overline{a}_{kj} = \delta_{ij}.$$

b) $$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, \overline{a}_{jk} = \delta_{ij}.$$

188. Chứng minh rằng:

a) Tích của các ma trận trực giao (unita) lại là một ma trận trực giao (unita).

b) Nghịch đảo của một ma trận trực giao (unita) là một ma trận trực giao (unita).

189. Ma trận vuông A được gọi là ma trận *đối hợp* nếu $A^2 = I$. Chứng minh rằng một ma trận có hai trong ba tính chất đối xứng, trực giao, đối hợp thì nó cũng có tính chất thứ ba.

190. Ma trận A được gọi là ma trận *lũy đẳng* nếu $A^2 = A$. Chứng minh rằng nếu A là ma trận lũy đẳng thì $B = 2A - I$ là ma trận đối hợp và ngược lại nếu B là ma trận đối hợp thì $A = \frac{1}{2}(B + I)$ là ma trận lũy đẳng.

191. Giả sử K là tập hợp tất cả các ma trận cỡ $m \times n$ trên trường P dạng $A = aI_{ij}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $a \in P$. Chọn một ma trận T cỡ $n \times m$ trên P và định nghĩa phép toán (0) trên K như sau: với $A, B \in K$:

$$A o B = A\,T\,B.$$

Chứng minh rằng:

a) $$(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C).$$

b) Nếu mỗi dòng và mỗi cột của T đều chứa phần tử khác 0 thì với mỗi $A \in K$ tồn tại $B \in K$ sao cho

$$A \circ B \circ A = A \text{ và } B \circ A \circ B = B.$$

c) Nếu mọi phần tử của T đều khác 0 thì với $A \neq 0$, $B \neq 0$ thuộc K ta có $A \circ B \neq 0$.

§3. KHÔNG GIAN CON BẤT BIẾN — VECTƠ RIÊNG VÀ GIÁ TRỊ RIÊNG

192. Giả sử φ là một phép biến đổi tuyến tính của không gian vectơ V, L là một không gian con của V bất biến đối với φ.

Chứng minh rằng:

a) Ảnh $\varphi(L)$ và tạo ảnh toàn phần $\varphi^{-1}(L)$ cũng bất biến đối với φ.

b) Nếu $f(t)$ là một đa thức nào đó của t thì L cũng bất biến qua phép biến đổi tuyến tính $f(\varphi)$ của không gian V.

c) Nếu φ không suy biến thì L cũng bất biến đối với phép biến đổi tuyến tính φ^{-1}.

193. Cho không gian n chiều V_n trong đó đã chọn một cơ sở $\alpha_1, ..., \alpha_n$, và φ là một phép biến đổi tuyến tính của V_n.

Chứng minh rằng:

a) Ma trận của φ đối với cơ sở đã cho có dạng $\begin{bmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, trong đó A là một ma trận vuông cấp $k < n$, khi và chỉ khi không gian con sinh bởi k vectơ $\alpha_1, ..., \alpha_k$ bất biến đối với φ.

b) Ma trận của φ đối với cơ sở đã cho có dạng $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B & A_2 \end{bmatrix}$, trong đó A_1 là một ma trận vuông cấp $k < n$, khi và chỉ khi không gian con sinh bởi $n - k$ vectơ $\alpha_{k+1}, ..., \alpha_n$ bất biến đối với φ.

c) Ma trận của φ đối với cơ sở đã cho có dạng $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, trong đó A_1 là một ma trận vuông cấp $k < n$, khi và chỉ khi cả hai không gian con sinh bởi các vectơ $\alpha_1, ..., \alpha_k$ và các vectơ $\alpha_{k+1}, ..., \alpha_n$ đều bất biến đối với φ.

194. Cho một phép biến đổi tuyến tính φ của một không gian vectơ V và giả sử đối với vectơ $\alpha \in V$ ta có $\varphi^k(\alpha) = 0$ nhưng $\varphi^{k-1}(\alpha) \neq 0$. Chứng minh rằng:

a) Tập $S = \{\alpha, \varphi(\alpha), \ldots, \varphi^{k-1}(\alpha)\}$ độc lập tuyến tính và không gian con W sinh bởi tập S bất biến đối với φ.

b) $\widehat{\varphi} = \varphi \mid W$ — ánh xạ thu hẹp của φ trên W — là một phép biến đổi tuyến tính lũy linh chỉ số k (tức là $\widehat{\varphi}^k = 0$, $\widehat{\varphi}^{k-1} \neq 0$), và đối với cơ sở S của W ma trận của $\widehat{\varphi}$ có dạng

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

195. Cho φ là một phép biến đổi tuyến tính của không gian vectơ n chiều V_n trên trường số phức **C**. Chứng minh rằng:

a) Mỗi không gian con L của V_n bất biến đối với φ đều chứa một không gian con một chiều cũng bất biến đối với φ.

b) Nếu V_n chỉ chứa một không gian con một chiều bất biến đối với φ thì V_n không phân tích được thành tổng trực tiếp của hai không gian con (khác 0) bất biến đối với φ.

196. Cho V là không gian các đa thức bậc $\leqslant n$ của ẩn x trên trường số thực, $\varphi : V \to V$ là ánh xạ biến mỗi đa thức thành đạo hàm của nó.

a) Chứng minh rằng φ là một phép biến đổi tuyến tính của không gian vectơ V.

b) Tìm tất cả các không gian con của V bất biến đối với φ.

c) Tìm tất cả các giá trị riêng và các vectơ riêng của phép biến đổi tuyến tính φ.

197. Giả sử phép biến đổi tuyến tính φ của không gian $\mathbf{R}^3$ đối với cơ sở đơn vị có ma trận là

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Tìm các giá trị riêng và vectơ riêng của phép biến đổi tuyến tính φ.

b) Tìm một cơ sở của $\mathbf{R}^3$ mà đối với nó ma trận B của phép biến đổi tuyến tính φ có dạng tam giác. Viết ma trận B đó.

c) Chứng tỏ rằng trong tất cả các cơ sở thỏa mãn điều kiện của câu (b) có ít nhất một cơ sở mà đối với nó ma trận B có ngoài đường chéo chính chỉ một phần tử khác 0 và bằng 1. Viết ma trận B lúc đó.

198. Giả sử phép biến đổi tuyến tính φ của không gian n chiều V_n trên trường số thực đối với một cơ sở nào đó có ma trận là A. Chứng minh rằng :

a) Đa thức đặc trưng của φ có dạng.

$$f(\lambda) = (-\lambda)^n + c_1(-\lambda)^{n-1} + c_2(-\lambda)^{n-2} + \dots + c_n,$$

trong đó c_k là tổng của tất cả các định thức con chính cấp k của ma trận A (định thức con chính là định thức con mà chỉ số hàng và chỉ số cột trùng nhau).

b) Tổng của tất cả các giá trị riêng của φ bằng vết của ma trận A (tức là tổng các phần tử trên đường chéo chính), còn tích của tất cả các giá trị riêng của φ bằng định thức của ma trận A.

c) Tập tất cả các vectơ riêng của φ ứng với một giá trị riêng λ_0 cùng với vectơ không sẽ lập thành một không gian con bất biến đối với φ.

199. Giả sử đa thức đặc trưng của ma trận A vuông cấp n với phần tử là những số phức tùy ý có nghiệm đặc trưng λ_0 bội $s > 0$, và giả sử r là hạng và $d = n - r$ là số khuyết của ma trận $A - \lambda_0 I$.

a) Chứng minh rằng $1 < d \leqslant s$.

b) Nêu ví dụ các ma trận vuông cấp n mà $d = 1$ hoặc $d = s$.

c) Chứng minh rằng nếu A không suy biến thì đa thức đặc trưng của ma trận nghịch đảo A^{-1} có nghiệm đặc trưng λ_0^{-1} bội s.

d) Chứng minh rằng đa thức đặc trưng của ma trận A^p có nghiệm đặc trưng λ_0^p bội s.

e) Chứng minh rằng $A^p = 0$ đối với một số nguyên dương p nào đó khi và chỉ khi mọi nghiệm đặc trưng của A đều bằng 0.

200. Cho các ma trận vuông :

a) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix};$$ b) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

c) $$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ cấp } n.$$

Tìm ma trận vuông T không suy biến để ma trận $B = T^{-1}AT$ là một ma trận chéo và viết ma trận B đó.

201. Cho một ma trận vuông A cấp n tùy ý. Chứng minh rằng :

a) A là nghiệm của đa thức đặc trưng của nó.

b) Tồn tại một và chỉ một đa thức bậc thấp nhất v hệ số cao nhất bằng 1 nhận A làm nghiệm (gọi là *đa th tối tiểu* của ma trận A).

c) Các ma-trận *đồng dạng* (là những ma trận A, B : tồn tại ma trận không suy biến T để $B = T^{-1}AT$) có cù một đa thức tối tiểu.

202. Giả sử φ là một phép biến đổi tuyến tính của k..c gian vectơ V, $f(t) = g(t)\, h(t)$ là một đa thức sao c $g(t)$ và $h(t)$ nguyên tố cùng nhau và $f(\varphi) = 0$. Chứng mi rằng :

a) Nếu $U = \operatorname{Ker} g(\varphi)$, $W = \operatorname{Ker} h(\varphi)$ thì U và W là c không gian con bất biến đối với φ.

b) $V = U \oplus W$.

c) Nếu $f(t)$ là đa thức tối tiểu của φ và $h(t)$, $g(t)$ các đa thức nguyên thủy (tức là có hệ số cao nhất bằn thì $g(t)$ và $h(t)$ là các đa thức tối tiểu của những thu hẹp của φ trên U và W tương ứng.

203. Giả sử φ là một phép biến đổi tuyến tính c không gian vectơ V_n với đa thức tối tiểu

$$m(t) = f_1(t)^{n_1} f_2(t)^{n_2} \dots f_r(t)^{n_r},$$

trong đó $f_i\,(t)$ là các đa thức bất khả quy nguyên th khác nhau. Chứng minh rằng :

a) $W_i = \operatorname{Ker} f_i(\varphi)^{n_i}$ là các không gian con bất biến c với φ, $f_i(t)^{n_i}$ là đa thức tối tiểu của cái thu hẹp củ trên W_i và $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$.

b) φ có ma trận dạng chéo đối với một cơ sở nào khi và chỉ khi đa thức tối tiểu $m(t)$ là tích của các nh tử bậc nhất phân biệt.

204. Giả sử φ là một phép biến đổi của không gian chiều V_n, trên một trường hợp P, $\alpha \neq 0$ là một ve thuộc V_n. Chứng minh rằng :

a) Tập $\{f(\varphi)(\alpha) \mid f(t)$ là các đa thức tùy ý trên $P\}$ là một không gian con của V bất biến đối với φ và ký hiệu là $Z(\alpha, \varphi)$.

b) Xét dãy $\alpha, \varphi(\alpha), \varphi^2(\alpha), \dots$ (1)

Giả sử k là số nguyên dương bé nhất để $\varphi^k(\alpha)$ là tổ hợp tuyến tính của các vectơ đứng trước nó trong dãy (1), chẳng hạn

$$\varphi^k(\alpha) = -a_{k-1}\varphi^{k-1}(\alpha) - \dots - a_1\varphi(\alpha) - a_0\alpha.$$

Thế thì $m_\alpha(t) = t^k + a_{k-1}t^{k-1} + \dots + a_1 t + a_0$ là đa thức nguyên thủy duy nhất bậc bé nhất mà $m_\alpha(\varphi)(\alpha) = 0$.

c) Nếu φ_α là cái thu hẹp của φ trên $Z(\alpha, \varphi)$ thì $m_\alpha(t)$ là đa thức tối tiểu của φ_α.

d) Ma trận của φ_α đối với cơ sở $\{\alpha, \varphi(\alpha), \dots, \varphi^{k-1}(\alpha)\}$ là :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{k-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{k-1} \end{bmatrix}.$$

§4. λ — MA TRẬN. MA TRẬN ĐỒNG DẠNG. DẠNG CHUẨN JOOCĐĂNG

205. Ma trận A vuông cấp n được gọi là đồng dạng với ma trận B vuông cấp n nếu tồn tại ma trận không suy biến T sao cho $B = T^{-1}AT$.

a) Chứng minh rằng nếu B thu được từ A bằng cách đổi chỗ dòng thứ i với dòng thứ j và cột thứ i với cột thứ j thì A đồng dạng với B.

b) Tìm tất cả các ma trận chỉ đồng dạng với chính nó.

206. Ta gọi là λ — *ma trận*, những ma trận mà phần tử là những đa thức của λ trên một trường K. Chứng minh rằng nếu ma trận vuông B biểu diễn được dưới dạng

$$B = B_0\lambda^s + B_1\lambda^{s-1} + \dots + B_s,$$

trong đó $B_0, \dots, B_s$ là các ma trận không phụ thuộc λ và B_0 không suy biến, thì mọi λ — ma trận vuông A cùng cấp với B có thể chia được bên trái hay bên phải cho B tức là tồn tại thương bên phải Q_1 và dư bên phải R_1 sao cho $A = BQ_1 + R_1$ và tồn tại thương bên trái Q_2 và dư bên trái R_2 sao cho $A = Q_2B + R_2$, trong đó bậc của các phần tử của R_1 và R_2 đối với λ bé hơn s, và các ma trận Q_1, R_1, Q_2, R_2 xác định một cách duy nhất.

207. Ta gọi λ — ma trận A là *tương đương* với λ — ma trận B, ký hiệu $A \sim B$, nếu có thể chuyển từ A sang B bởi một số hữu hạn phép biến đổi sơ cấp : (i) nhân một dòng (cột) với một phần tử $a \neq 0$ của trường K, (ii) cộng vào một dòng (cột) một dòng (cột) khác đã nhân với một đa thức $f(\lambda)$ tùy ý. Chứng minh rằng :

a) Có thể thực hiện các phép biến đổi sơ cấp đó bằng cách nhân bên phải hay bên trái A với các ma trận vuông không suy biến thích hợp.

b) Sự tương đương của các λ — ma trận thỏa mãn các tính chất phản xạ, đối xứng, bắc cầu.

c) Nếu B thu được từ A bằng cách đổi chỗ các dòng hay cột thì $A \sim B$.

208. λ — ma trận A được gọi là ma trận *chính tắc* nếu nó có dạng chéo

$$A = \begin{bmatrix} e_1(\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e_n(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Trong đó $e_i(\lambda) \vdots e_{i-1}(\lambda)$, $i = 2, \ldots, r$ và nếu $e_i(\lambda) \neq 0$ thì nó có hệ số cao nhất bằng 1. Chứng minh rằng mỗi λ — ma trận A tương đương với một và chỉ một ma trận chính tắc (gọi là *dạng chính tắc* của ma trận A).

209. Tìm dạng chính tắc của các λ — ma trận sau :

a) $\begin{bmatrix} -2\lambda^2 - 12\lambda + 16 & 2 - \lambda & 2\lambda^2 - 12\lambda + 17 \\ 0 & 3 - \lambda & 0 \\ \lambda^2 - 6\lambda + 7 & 2 - \lambda & \lambda^2 - 6\lambda + 8 \end{bmatrix}$,

b) $\begin{bmatrix} \lambda + 1 & \lambda^2 + 1 & \lambda^2 \\ 3\lambda - 1 & 3\lambda^2 - 1 & \lambda^2 + 2\lambda \\ \lambda - 1 & \lambda^2 - 1 & \lambda \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5+\lambda \end{bmatrix}$.

d) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{bmatrix}$.

210. Ta gọi các *nhân tử bất biến* của λ — ma trận vuông cấp n là các đa thức $E_1(\lambda), E_2(\lambda), \ldots, E_n(\lambda)$ nằm trên đường chéo chính của dạng chính tắc của ma trận A. Chứng minh rằng :

a) Nếu hạng $A = r$ thì $E_k(\lambda) \neq 0$ với $k = 1, \ldots, r$ và $E_k(\lambda) = 0$ với $k = r + 1, \ldots, n$.

b) Nếu ký hiệu $D_k(\lambda)$ là ước chung lớn nhất (lấy với hệ số cao nhất bằng 1) của mọi định thức con cấp k của ma trận A thi $E_k(\lambda) = \dfrac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)}$ $(k = 1, \ldots, r\,;\ D_0 = 1)$ (với quy ước $D_k(\lambda) = 0$ nếu mọi định thức con cấp k của A bằng 0).

211. Chứng minh rằng λ — ma trận vuông A cấp n tương đương với λ — ma trận B cấp n khi và chỉ khi thỏa mãn một trong các điều kiện sau :

a) A và B có chung các nhân tử bất biến.

b) A và B có chung ma trận chính tắc.

c) $B = PAQ$, trong đó P và Q là những λ — ma trận vuông cấp n có định thức không đổi và khác 0.

212. Ta định nghĩa các *ước sơ cấp* của λ — ma trận A là các đa thức với hệ số cao nhất bằng 1, $u_1(\lambda), \ldots, u_s(\lambda)$, trùng với các lũy thừa cao nhất của các nhân tử bất khả quy có mặt trong sự phân tích của các nhân tử bất biến $E_k(\lambda)$ của A thành các nhân tử bất khả quy. Chú ý rằng tập các ước sơ cấp của ma trận A chứa mỗi đa thức $u_i(\lambda)$ một số lần bằng số các nhân tử $E_k(\lambda)$ chứa nó trong sự phân tích thành nhân tử bất khả quy.

Tìm các ước sơ cấp của các ma trận sau :

a) $$\begin{bmatrix} 4 & -5-\lambda & -2 & 4 \\ 3-\lambda & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1-\lambda \end{bmatrix},$$

b) $$\begin{bmatrix} \lambda^2+2 & 2\lambda+1 & \lambda^2+1 \\ \lambda^2+4\lambda+4 & 2\lambda+3 & \lambda^2+4\lambda+3 \\ \lambda^2-4\lambda+3 & 2\lambda-1 & \lambda^2-4\lambda+2 \end{bmatrix},$$

c) $\begin{bmatrix} \lambda^2-2 & \lambda^2+\lambda+3 & \lambda^2+2 & \lambda^2-3 \\ \lambda^2+3\lambda-1 & \lambda^2+3\lambda+3 & \lambda^2+2\lambda+1 & \lambda^2+3\lambda-2 \\ 2\lambda^2-4 & \lambda^2+\lambda+4 & \lambda^2+3 & 2\lambda^2-5 \\ 2\lambda^2+3\lambda-3 & \lambda^2+3\lambda+4 & \lambda^2+2\lambda+2 & 2\lambda^2+3\lambda-4 \end{bmatrix}$,

d) $\begin{bmatrix} \lambda-a & b & b & b \dots b \\ 0 & \lambda-a & b & b \dots b \\ 0 & 0 & \lambda-a & b \dots b \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots \lambda-a \end{bmatrix}$

213. Chứng minh rằng ma trận A đồng dạng với ma trận B khi và chỉ khi ma trận $A-\lambda I$ tương đương với ma trận $B-\lambda I$.

214. Ta định nghĩa *ma trận Joocđăng* là ma trận dạng

$$A_J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \varepsilon_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & \varepsilon_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \lambda_{n-1} & \varepsilon_{n-1} \\ & & & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

trong đó: (i) λ_i thuộc trường cơ sở K, $\varepsilon_i = 0$ hay 1, (ii) nếu $\varepsilon_i = 1$, thì $\lambda_i = \lambda_{i+1}$.

Chứng minh rằng ma trận A đồng dạng với một ma trận Joocđăng khi và chỉ khi đa thức đặc trưng của ma trận A có mọi nghiệm thuộc trường cơ sở K.

215. Ta định nghĩa *dạng chuẩn Joocđăng* của một ma trận A là ma trận Joocđăng A_J đồng dạng với A. Tìm dạng chuẩn Joocđăng của các ma trận sau :

a) $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$. b) $\begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. d) $\begin{bmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \\ 0 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & n & \dots & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{bmatrix}$.

216. Ta định nghĩa *khối Joocđăng* thuộc phần tử λ_0 là ma trận Joocđăng dạng

$$J_k = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & & & & \\ & \lambda_0 & 1 & & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & \lambda_0 & 1 \\ & & & & & \lambda_0 \end{bmatrix}.$$

Như vậy ma trận Joocđăng là một ma trận mà trên đường chéo là các khối Joocđăng.

a) Chứng minh rằng hai ma trận Joocđăng đồng dạng với nhau khi và chỉ khi chúng gồm các khối Joocđăng như nhau (có thể khác thứ tự).

b) Tìm đa thức tối tiểu của khối Joocđăng cấp n thuộc phần tử λ_0.

c) Tìm dạng chuẩn Joocđăng của bình phương của một khối Joocđăng cấp n phụ thuộc phần tử không.

217. Chứng minh rằng mỗi ma trận vuông có thể biểu diễn thành tích của hai ma trận đối xứng, trong đó có một ma trận không suy biến.

§5. ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH CỦA KHÔNG GIAN ƠCLIT VÀ KHÔNG GIAN UNITA

218. Giả sử φ là một phép biến đổi tuyến tính của không gian Ơclit (unita) E. Phép biến đổi φ^* của E xác định bởi

$$\langle \varphi(x), y \rangle = \langle x, \varphi^*(y) \rangle$$

với mọi $x, y \in E$, được gọi là phép biến đổi liên hợp của φ. Chứng minh rằng:

a) Mỗi phép biến đổi tuyến tính của không gian Ơclit (unita) có một và chỉ một phép biến đổi liên hợp φ^*, và φ^* là một phép biến đổi tuyến tính của E.

b) $(\varphi^*)^* = \varphi$, $(k\varphi)^* = \overline{k}\varphi^*$.

c) Nếu ψ cũng là một phép biến đổi tuyến tính của E thì

$$(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*, \ (\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*.$$

d) Nếu E là một không gian n chiều và đối với một cơ sở trực chuẩn nào đó của E mà φ có ma trận là A thì φ^* có ma trận là $\overline{A}'$.

219. Trong không gian Ơclit 3 chiều E_3 đã cho một cơ sở trực chuẩn e_1, e_2, e_3.

a) Phép biến đổi tuyến tính φ của E_3 đối với cơ sở $u_1 = e_1 - e_2 + 2e_3$; $u_2 = 2e_1 + e_2$; $u_3 = e_1 + e_3$ có ma trận là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tìm ma trận của φ^* đối với cơ sở đó.

b) Phép biến đổi tuyến tính ψ của E_3 biến các vect $x_1 = e_3$, $x_2 = e_2 + e_3$, $x_3 = e_1 + e_2 + e_3$ thành các vect tương ứng $y_1 = e_1 + 2e_2 + e_3$, $y_2 = 3e_1 + e_2 + 2e_3$ $y_3 = 7e_1 - e_2 + 4e_3$. Tìm ma trận của ψ^* đối với cơ s e_1, e_2, e_3.

220. Giả sử không gian Ơclit (unita) hữu hạn chiều là tổng trực tiếp của các không gian con L và M, L^* v M^* là bù trực giao tương ứng của L và M.

a) Chứng minh rằng $E = L^* \oplus M^*$.

b) Nếu φ là phép chiếu của E lên L song song với M t φ^* là phép chiếu của E lên M^* song song với L^*.

221. Cho một không gian unita n chiều E, φ là một phé biến đổi tuyến tính của E. Chứng minh rằng :

a) Nếu không gian con L của E bất biến đối với φ t bù trực giao L^* của L bất biến đối với φ^*.

b) φ có các không gian con bất biến với số chiều tùy từ 0 tới n.

c) Trong E tồn tại cơ sở trực chuẩn sao cho đối với c sở đó ma trận của φ có dạng tam giác.

222. Phép biến đổi tuyến tính φ của một không gia unita (Ơclit) E được gọi là một *phép biến đổi unita* (phé biến đổi trực giao) nếu φ bảo đảm toàn tích vô hướn trong E, tức là

$$\langle\varphi(x), \varphi(y)\rangle = \langle x, y\rangle \text{ với mọi } x, y \in E.$$

Chứng minh rằng :

a) Nếu ánh xạ $\varphi : E \to E$ bảo toàn tích vô hướng thì n là phép biến đổi unita (trực giao) của E.

b) Phép biến đổi tuyến tính φ của E là phép biến đ unita (trực giao) khi và chỉ khi φ bảo toàn độ dài của m vectơ của E, tức là

$$\langle\varphi(x), \varphi(x)\rangle = \langle x, x\rangle \text{ với mọi } x \in E.$$

223. Giả sử E_n là một không gian unita (Ơclit) n chiều. Chứng minh rằng phép biến đổi tuyến tính φ của E là một phép biến đổi unita (trực giao) khi và chỉ khi thỏa mãn một trong các điều kiện sau :

a) φ biến một cơ sở trực chuẩn của E thành một cơ sở trực chuẩn của E.

b) Ma trận A của φ đối với một cơ sở trực chuẩn nào đó của E là một ma trận unita (trực giao) (xem bài tập **186** và **187**).

224. Giả sử φ là một phép biến đổi trực giao của một không gian Ơclit n chiều E_n. Chứng minh rằng :

a) Nếu L là một không gian con của E_n bất biến đối với φ thì phần bù trực giao L^* cũng bất biến đối với φ.

b) φ có không gian con bất biến một chiều hoặc hai chiều.

c) Trong E_n tồn tại một cơ sở trực chuẩn sao cho đối với cơ sở đó ma trận của φ có dạng chính tắc sau đây :

$$\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & -1 & & & & & 0 & & \\
 & & & & \ddots & & & & & & \\
 & & & & & -1 & & & & & \\
 & & & & & & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & & & \\
 & & & & & & -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & \\
 & & & & & & & & \ddots & & \\
0 & & & & & & & & & \cos\theta_k & \sin\theta_k \\
 & & & & & & & & & -\sin\theta_k & \cos\theta_k
\end{bmatrix}$$

225. Giả sử φ là một phép biến đổi unita của không gian unita n chiều E_n. Chứng minh rằng :

a) Nếu L là một không gian con của E_n bất biến đối với φ thì phần bù trực giao L^* cũng bất biến đối với φ.

b) Các giá trị riêng của phép biến đổi φ có môđun bằng 1.

c) Trong E_n tồn tại một cơ sở trực chuẩn gồm các vectơ riêng của φ sao cho đối với cơ sở đó ma trận của φ có dạng chéo mà các phần tử chéo có môđun bằng 1.

226. Một phép biến đổi tuyến tính φ của không gian unita (Ơclit) E được gọi là một *phép biến đổi Ecmit* (*đối xứng*) nếu $\varphi = \varphi^*$, trong đó φ^* là phép biến đổi liên hợp của φ (xem bài tập 218). Chứng minh rằng đối với các không gian hữu hạn chiều E_n phép biến đổi tuyến tính φ là phép biến đổi Ecmit (đối xứng) khi và chỉ khi thỏa mãn một trong các điều kiện :

a) ma trận A của φ đối với một cơ sở trực chuẩn nào đó của E_n là một ma trận Ecmit (đối xứng), tức là $A = \overline{A}'$ $(A = A')$

b) Đối với một cơ sở trực chuẩn nào đó của E_n thì có ma trận thực chéo.

227. Một phép biến đổi tuyến tính φ của không gian unita (Ơclit) E được gọi là một *phép biến đổi đối xứng lệch* nếu $\varphi^* = -\varphi$, trong đó φ^* là phép biến đổi liên hợp của φ. Chứng minh rằng :

a) Tập các phép biến đổi đối xứng lệch của không gian Unita E lập thành một không gian vectơ trên trường số thực.

b) Phép biến đổi tuyến tính φ của không gian unita (Ơclit) n chiều E là một phép biến đổi đối xứng lệch khi và chỉ khi đối với một cơ sở trực chuẩn của E ma trận A của φ thỏa mãn điều kiện $\overline{A}' = -A$.

c) Phép biến đổi tuyến tính φ của không gian unita n chiều E là một phép biến đổi đối xứng lệch khi và chỉ khi đối với một cơ sở trực chuẩn nào đó của E thì φ có ma trận dạng chéo mà các phần tử trên đường chéo hoặc bằng 0 hoặc thuần ảo.

228. Giả sử E là một không gian Ơclit n chiều, φ là một phép biến đổi đối xứng lệch của E. Chứng minh rằng:

a) Nếu F là một không gian con của E bất biến đối với φ thì bù trực giao F^* cũng bất biến đối với φ.

b) φ có các không gian con bất biến một chiều hoặc 2 chiều:

c) Tồn tại một cơ sở trực chuẩn trong không gian Ơclit E sao cho đối với cơ sở đó ma trận của φ có dạng chính tắc sau đây: trên đường chéo chính có các khối cấp hai dạng $\begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix}$, trong đó β là số thực $\neq 0$, và những phần tử không.

229. Phép biến đổi tuyến tính φ của một không gian unita (Ơclit) E được gọi là một *phép biến đổi chuẩn tắc*, nếu $\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$, trong đó φ^* là phép biến đổi liên hợp của φ. Chứng minh rằng:

a) Các phép biến đổi Unita, Ecmit và đối xứng lệch đều là những phép biến đổi chuẩn tắc;

b) Mọi vectơ riêng x của phép biến đổi chuẩn tắc φ cũng là vectơ riêng của phép biến đổi liên hợp φ^*.

c) Các vectơ riêng của phép biến đổi chuẩn tắc φ ứng với những giá trị riêng khác nhau thì trực giao với nhau.

d) Phép biến đổi tuyến tính φ của một không gian unita n chiều E là một phép biến đổi chuẩn tắc khi và chỉ khi đối với một cơ sở trực chuẩn của E ma trận của φ có dạng chéo.

230. Giả sử E là một không gian unita, φ là một phép biến đổi tuyến tính của không gian E. Chứng minh rằng:

a) Phép biến đổi tuyến tính φ biểu diễn được một cách duy nhất dưới dạng

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2,$$

trong đó φ_1 là phép biến đổi Ecmit của E còn φ_2 là phép biến đổi đối xứng lệch của E.

b) Phép biến đổi tuyến tính φ biểu diễn được một cách duy nhất dưới dạng

$$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2,$$

trong đó φ_1 và φ_2 là các phép biến đổi Ecmit của E.

c) Điều kiện ắt có và đủ để φ là một phép biến đổi chuẩn tắc là φ_1 và φ_2 trong hai biểu diễn trên giao hoán với nhau.

CHƯƠNG V

DẠNG SONG TUYẾN TÍNH VÀ DẠNG TOÀN PHƯƠNG

Một đa thức $F(x_1, ..., x_n)$ của n biến với hệ tử thuộc một trường K nào đó được gọi là một *dạng bậc p* trên K của $x_1, ..., x_n$, nếu tất cả các hạng tử của F đều có cùng bậc p đối với tập thể các ẩn. Nếu $p = 1$ ta được dạng *tuyến tính*, $p = 2$ ta được dạng *toàn phương*, $p = 3$ ta được dạng *lập phương*, ...

Nếu từ các ẩn $x_1, ..., x_n$ ta chuyển tới các ẩn mới $x_1', ..., x_n'$ bởi các công thức

$$x_j = t_{1j}\, x_1' + t_{2j}\, x_2' + ... + t_{nj}\, x_n', \quad j = 1, 2, ..., n \qquad (1)$$

thì ma trận $T = [t_{ij}]$ được gọi là ma trận của phép biến đổi các ẩn x_i thành các ẩn x'_i (T luôn luôn được giả thiết là khả nghịch).

Nếu ta xét đồng thời một đa thức của hai hệ thống ẩn $x_1, ..., x_n$ và $y_1, ..., y_n$ thì đa thức ấy được gọi là một *dạng* nếu nó đẳng cấp đối với mỗi hệ thống ẩn riêng biệt. Nếu nó tuyến tính đối với mỗi hệ thống ẩn thì ta gọi là dạng *song tuyến tính*, nếu nhiều hệ thống ẩn thì ta gọi là dạng *đa tuyến tính*.

Các dạng có thể biến từ dạng này qua dạng khác nhờ các phép biến đổi tuyến tính độc lập về các ẩn, được gọi là các dạng *tương đương*. Nếu các hệ thống ẩn có cùng một số ẩn và các dạng có thể biến đổi từ dạng này về dạng kia nhờ các phép biến đổi tuyến tính về mỗi hệ thống ẩn có cùng một ma trận thì các dạng đó được gọi là *tương đẳng* nhau.

Dạng song tuyến tính của các hệ thống ẩn $x_1, ..., x_n$ và $y_1, ..., y_n$ có dạng $F = \Sigma a_{ij} x_i y_j$; $i, j = 1, 2, ..., n$. Ma trận $A = [a_{ij}]$ được gọi là *ma trận* của dạng còn hạng của A được gọi là *hạng* của dạng.

Nếu trường cơ sở là trường số phức thì dạng song tuyến tính được gọi là *dạng Ecmit* nếu nó có dạng

$$F = \Sigma a_{ij} x_i \overline{y}_j.$$

Dạng Ecmit được gọi là *đối xứng* nếu ma trận của nó là *đối xứng Ecmit*, tức là nếu $\overline{A}' = A$.

Mỗi dạng toàn phương của các ẩn $x_1, ..., x_n$ đều có thể viết một cách duy nhất dưới dạng đối xứng

$$F(x) = \Sigma a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji}).$$

Ma trận $A = a_{ij}$ cấp n được gọi là ma trận của dạng toàn phương. Dạng song tuyến tính đối xứng

$$F(x, y) = \Sigma a_{ij} x_i y_j$$

có cùng ma trận A, được gọi là *dạng cực* của dạng toàn phương tương ứng.

Biểu thức dạng

$$F(x) = \Sigma a_{ij} x_i \overline{x_j} = X A \overline{X'} \text{ với } X = [x_1, \ldots, x_n]$$

với điều kiện $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ được gọi là *dạng toàn phương Ecmit* với ma trận $A = [a_{ij}]$. Dạng song tuyến tính đối xứng Ecmit $F(x, y) = \Sigma a_{ij} x_i \overline{y_j}$ cũng được gọi là dạng cực của nó.

Có thể đưa một dạng toàn phương và dạng chính tắc $x_1^2 + \ldots + x_r^2$, trong đó r là hạng của dạng nhờ thuật toán Lagờrăng. Dạng toàn phương thực được gọi là *dạng không âm* nếu với mọi hệ thống giá trị thực của các ẩn x_i, giá trị của dạng đều không âm. Dạng được gọi là *xác định dương* nếu với mọi hệ thống giá trị của các ẩn, giá trị của dạng là thực sự dương. Các khái niệm dạng không dương và dạng xác định âm được định nghĩa tương tự. Các dạng không dương và không âm được gọi là dạng *không thay đấu*.

Một dãy dạng song tuyến tính $F_1, \ldots, F_k$ của cùng các hệ thống ẩn $x_1, \ldots, x_n$ và $y_1, \ldots, y_n$ được gọi là *tương đương* với dãy dạng song tuyến tính $G_1, \ldots, G_k$ của các ẩn $x'_1, \ldots, x'_n$ và $y'_1, \ldots, y'_n$ nếu nhờ các phép biến đổi tuyến tính khả nghịch của các ẩn

$$[x] = [x']T\ ;\ [y] = [y']S\ \ ([x] = [x_1, \ldots, x_n])$$

các dạng của dãy thứ nhất có thể đưa về các dạng tương ứng của dãy thứ hai.

Dãy dạng song tuyến tính với ma trận $A_1, \ldots, A_k$ là tương đương với dãy dạng song tuyến tính với ma trận $B_1, \ldots, B_k$ khi và chỉ khi tồn tại các ma trận không suy biến P, Q với phần tử thuộc trường cơ sở sao cho

$$P A_j Q = B_j \quad (j = 1, \ldots, k).$$

Các dãy ma trận đó cũng được gọi là tương đương với nhau.

Dãy dạng song tuyến tính của các ẩn $x_1, ..., x_n$ và $y_1, ..., y_n$ với các ma trận $A_1, ..., A_k$ được gọi là *tương đẳng* với dãy dạng song tuyến tính với các ma trận $B_1, ..., B_k$ nếu nhờ cùng một phép biến đổi cả hai hệ thống ẩn, các dạng của hệ thứ nhất có thể đưa về các dạng tương ứng của dãy thứ hai.

Hai dãy ma trận tùy ý $A_1, ..., A_k$ và $B_1, ..., B_k$ được gọi là tương đẳng nếu tồn tại một ma trận không suy biến T sao cho

$$B_j = T A_j T' \ (j = 1, 2, ..., k).$$

Đó cũng là điều kiện ắt có và đủ để các dạng toàn phương với ma trận $A_1, ..., A_k$ và $B_1, ..., B_k$ tương đẳng nhau. Đối với các dạng Ecmit, điều kiện trên được thay bởi

$$B_j = T A_j \overline{T}' \ (j = 1, 2, ..., k).$$

Giả sử F, G là cặp dạng toàn phương cùng cấp n. Các nhân tử bất biến của λ — ma trận $\lambda F - G$ được gọi là *nhân tử bất biến của cặp F, G*. Phương trình $|\lambda F - G| = 0$ được gọi là λ — *phương trình* của cặp dạng F, G.

Ta nói rằng trên không gian tuyến tính $\mathcal{L}$ đã cho một hàm $\varphi(x, y)$ của hai biến vectơ x, y nếu ta đặt tương ứng mỗi cặp vectơ của không gian $\mathcal{L}$ với một phần tử xác định $\varphi(x, y)$ thuộc trường cơ sở K của không gian đang xét. Hàm $\varphi(x, y)$ được gọi là *hàm song tuyến tính* nếu nó tuyến tính đối với mỗi biến riêng biệt, tức là nó thỏa mãn các đồng nhất thức

(1) $\varphi(c_1x_1 + c_2x_2, y) = c_1\varphi(x_1, y) + c_2\varphi(x, y)$;

(2) $\varphi(x, d_1y_1 + d_2y_2) = d_1\varphi(x, y_1) + d_2\varphi(x, y_2)$.

Hàm song tuyến tính trên không gian phức được gọi là *song tuyến tính Ecmit* nếu nó tuyến tính đối với biến thứ

nhất và phản tuyến tính đối với biến thứ hai, tức là t
thỏa mãn hệ thức 1) và hệ thức

(3) $\varphi(x, d_1y_1 + d_2y_2) = \overline{d_1}.\varphi(x, y_1) + \overline{d_2}\,\varphi(x, y_2)$.

Từ đó suy ra tính phân phối:

$$\varphi(x_1 + \ldots + x_m, y_1 + \ldots + y_s) = \Sigma\varphi(x_i, y_j).$$

Bây giờ nếu chọn trong $\mathcal{L}$ một cơ sở $a_1, \ldots, a_n$ và giả

$$x = x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n,$$
$$y = y_1a_1 + y_2a_2 + \ldots + y_na_n.$$

Thế thì từ các công thức trên suy ra

$$\varphi(x, y) = \Sigma\varphi(a_i, a_j)x_iy_j = \Sigma a_{ij}x_ix_j(a_{ij} = \varphi(a_i, a_j)),$$

tức là hàm được biểu diễn bởi một dạng song tuyến tí
Ma trận $A = [a_{ij}]$ cấp n được gọi là *ma trận của hà*
$\varphi(x, y)$ trong cơ sở nói trên.

Tương tự giá trị của hàm song tuyến tính Ecmit $\varphi(x,$
được biểu thị bởi công thức

$$\varphi(x, y) = \sum \varphi(a_i, a_j)x_i\overline{y_j},$$

tức là bởi một dạng song tuyến tính Ecmit.

Giả sử $\varphi(x, y) = \varepsilon\,\varphi(y, x)$. Nếu $\varepsilon = 1$, hàm song tuy
tính $\varphi(x, y)$ được gọi là *đối xứng*, nếu $\varphi = -1$, nó đư
gọi là *hàm phản xứng*.

Các hàm một vectơ thu được từ các hàm song tuy
tính *đối xứng Ecmit* bằng cách đồng nhất các biến vec
được gọi là các *hàm toàn phương Ecmit*. Còn hàm d
$\Psi(x) = \varphi(x, x)$, trong đó $\varphi(x, y)$ là một dạng song tuy
tính nào đó, được gọi là *hàm toàn phương*.

Không gian tuyến tính $\mathcal{L}$ được gọi là không gian *mêt
song tuyến tính* nếu trong nó đã xác định một hàm so
tuyến tính mà giá trị của nó ta sẽ gọi là *tích vô hướ
của các vectơ a, b và ký hiệu là (a, b). Nếu tích vô hư

là một hàm song tuyến tính ecmit đối xứng thì không gian sẽ được gọi là có *mêtric song tuyến tính ecmit*. Nếu ma trận của tích vô hướng không suy biến thì không gian sẽ được gọi là *không suy biến*, trái lại thì gọi là không gian suy biến.

Ma trận

$$G = \begin{bmatrix} (a_1, a_1) \dots (a_1, a_m) \\ (a_2, a_1) \dots (a_2, a_m) \\ \dots \dots \dots \\ (a_m, a_1) \dots (a_m, a_m) \end{bmatrix}$$

thành lập từ các tích vô hướng của các vectơ $a_1, \dots, a_m$ của không gian mêtric song tuyến tính $\mathcal{L}$ được gọi là *ma trận Gram* của hệ $a_1, \dots, a_m$. Ma trận Gram thành lập đối với các vectơ $a_1, \dots, a_n$ tạo thành cơ sở của không gian $\mathcal{L}$ chẳng qua là ma trận của hàm song tuyến tính cơ bản $\varphi(x, y) = (x, y)$ tính trong cơ sở đó.

Vectơ a thuộc không gian $\mathcal{L}$ (mêtric song tuyến tính thường hoặc ecmit) được gọi là *trực giao bên trái* với vectơ b, nếu $(a, b) = 0$ hoặc, b trực giao bên phải với a. Tập hợp tất cả các vectơ của $\mathcal{L}$ trực giao bên phải với một hệ vectơ M nào đó của $\mathcal{L}$ là một không gian con của của $\mathcal{L}$ và được ký hiệu là $M^{\perp}$. Tương tự đối với không gian ${}^{\perp}M$.

Vectơ x được gọi là *đẳng hướng bên trái* trong không gian $\mathcal{L}$ nếu nó trực giao bên trái với mọi vectơ của $\mathcal{L}$. Không gian ${}^{\perp}\mathcal{L}$ được gọi là *không gian con đẳng hướng bên trái* của $\mathcal{L}$. Tương tự đối với $\mathcal{L}^{\perp}$.

Các không gian mêtric song tuyến tính trên cùng một trường được gọi là *đẳng cấu* nếu chúng là các không gian tuyến tính đẳng cấu và tích vô hướng được bảo tồn qua ánh xạ đẳng cấu đó.

Không gian mêtric song tuyến tính thực không suy biến với mêtric đối xứng $(x, y) = (y, x)$ được gọi là *không gian giả Ơclit*. Không gian mêtric không suy biến song tuyến tính với mêtric phản ứng được gọi là không gian *đơn hình*. Không gian mêtric song tuyến tính phức không suy biến với mêtric đối xứng được gọi là không gian *Ơclit* phức. Không gian phức không suy biến với mêtric đối xứng ecmit $(x, y) = \overline{(y, x)}$ được gọi là không gian *giả unita*.

Giả sử đã cho phép biến đổi tuyến tính $\mathcal{A}$ của không gian tuyến tính $\mathcal{L}$. Phép biến đổi tuyến tính $\mathcal{A}^*$ của $\mathcal{L}$ được xác định bởi

$$(x\mathcal{A}, a) = (x, a\mathcal{A}^*)$$

đối với mọi $x \in \mathcal{L}$ và vectơ a đã cho thuộc $\mathcal{L}$, được gọi là phép biến đổi *liên hợp bên phải* của $\mathcal{A}$.

Tương tự, phép biến đổi $^*\mathcal{A}$ xác định bởi

$$(x, a\mathcal{A}) = (x\,^*\mathcal{A}, a)$$

đối với một vectơ a đã cho thuộc $\mathcal{L}$ được gọi là phép biến đổi *liên hợp bên trái* của $\mathcal{A}$.

Phép biến đổi tuyến tính $\mathcal{A}$ của không gian mêtric mêtric song tuyến tính $\mathcal{L}$ được gọi là biến đổi *đối xứng* nếu với mọi $x, y \in \mathcal{L}$ đều có:

$$(x\mathcal{A}, y) = (x, y\mathcal{A}).$$

Tương tự $\mathcal{A}$ được gọi là *phản xứng* nếu

$$(x\mathcal{A}, y) = -(x, y\mathcal{A}).$$

§ 1. DẠNG SONG TUYẾN TÍNH

231. a) Chứng minh rằng nếu biến đổi từ các biến x_i thành các biến x_i' nhờ ma trận T_1, từ các biến x_i' tới các

b) Giả sử $p > 0$ là số bội của nghiệm λ_0 của đa thức đặc trưng $| A - \lambda E |$ của ma trận A cấp n, r là hạng và $d = n - r$ là số khuyết của ma trận $A - \lambda_0 E$. Chứng minh rằng.

$$1 \leqslant d = n - r \leqslant p.$$

c) Chứng minh rằng tất cả các số đặc trưng của một ma trận đối xứng thực A đều nằm trên đoạn $[a, b]$ khi và chỉ khi dạng toàn phương với ma trận $A - \lambda_0 E$ xác định dương với mọi $\lambda_0 < a$ và xác định âm với mọi $\lambda_0 > b$.

258. Giả sử A và B là các ma trận đối xứng thực. Chứng minh rằng nếu các số đặc trưng của ma trận A đều nằm trên đoạn $[a, b]$, còn các số đặc trưng của ma trận B trên đoạn $[c, d]$ thì các số đặc trưng của ma trận $A + B$ nằm trên đoạn $[a + c, b + d]$.

259. Chứng minh rằng :

a) Một dạng toàn phương không suy biến có thể đưa về dạng chuẩn tắc được nhờ một phép biến đổi trực giao khi và chỉ khi ma trận của nó là ma trận trực giao.

b) Ma trận của một dạng toàn phương xác định dương là trực giao khi và chỉ khi dạng đó là tổng của các bình phương.

c) Theo ngôn ngữ ma trận, câu b) sẽ được diễn đạt như thế nào?

260. Chứng minh rằng một ma trận thực không suy biến A bất kỳ có thể biểu diễn được dưới dạng $A = QB$, trong đó Q là một ma trận trực giao và B là một ma trận tam giác dạng

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

với các phần tử dương trên đường chéo chính và sự biểu diễn như vậy là duy nhất.

261. Chứng minh rằng:

a) Một ma trận thực không suy biến A bất kỳ có thể biểu diễn được dưới dạng $A = Q_1B_1$ cũng như dưới dạng $A = B_2Q_2$, trong đó các ma trận Q_1 và Q_2 là các ma trận thực và trực giao, còn các ma trận B_1 và B_2 là các ma trận thực, đối xứng và có các định thức con góc dương. Mỗi sự biểu diễn đó đều duy nhất.

b) Ma trận không suy biến phức bất kỳ A có thể biểu diễn thành $A = Q_1B_1$ cũng như thành $A = B_2\ Q_2$, trong đó các ma trận Q_1 và Q_2 unita, còn các ma trận B_1 và B_2 là ma trận ecmit với các định thức con góc dương (ma trận B được gọi là Ecmit nếu $\overline{B'} = B$). Mỗi sự biểu diễn đó đều duy nhất.

c) Giả sử ma trận A đối xứng (hoặc Ecmit) với các định thức con góc dương và B là ma trận trực giao (unita). Chứng minh rằng:

1) Các tích AB và BA là các ma trận đối xứng (Ecmit) với các định thức con góc dương khi và chỉ khi B là ma trận đơn vị.

2) Các tích AB và BA là ma trận trực giao (unita) khi và chỉ khi A là ma trận đơn vị.

§3. CẶP DẠNG

262. Giả sử đã cho hai cặp ma trận vuông F, G và F_1, G_1 cùng cấp, trong đó F và F_1 không suy biến. Chứng minh rằng các cặp F, G và F_1, G_1 tương đương khi và chỉ khi các nhân tử bất biến của ma trận $\lambda F - G$ trùng với các nhân tử bất biến của $\lambda F_1 - G_1$.

237. Chứng minh rằng:

a) Bằng một phép biến đổi trực giao thực thích hợp có thể đưa dạng toàn phương thực về dạng chính tắc (dạng chéo)

$$c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + \dots + c_rx_r^2,$$

trong đó r là hạng của dạng đã cho và $c_1, \dots, c_r$ là các số đặc trưng khác không phân biệt của ma trận của dạng.

b) Các dạng toàn phương thực là tương đẳng trực giao khi và chỉ khi các đa thức đặc trưng của các dạng trùng nhau.

c) Bằng một phép biến đổi tuyến tính thích hợp có thể đưa dạng toàn phương thực về dạng chuẩn tắc

$$x'^2_1 + \dots + x'^2_s - x'^2_{s+1} - \dots - x'^2_r.$$

238. Chứng minh rằng:

a) Bằng một phép biến đổi unita, mỗi dạng toàn phương Ecmit có thể đưa về dạng chính tắc

$$c_1x_1\overline{x}_1 + c_2x_2\overline{x}_2 + \dots + c_rx_r\overline{x}_r,$$

trong đó r là hạng của dạng, $c_1, \dots, c_r$ là các số đặc trưng khác không của ma trận của dạng.

b) Điều kiện ắt có và đủ để hai dạng toàn phương Ecmit tương đẳng unita là các đa thức đặc trưng của các ma trận của chúng trùng nhau.

c) Bằng một phép biến đổi tuyến tính, có thể đưa dạng toàn phương Ecmit về dạng chuẩn tắc

$$x_1\overline{x}_1 + \dots + x_s\overline{x}_s - x_{s+1}\overline{x}_{s+1} - \dots - x_r\overline{x}_r.$$

239. Mỗi dạng toàn phương thực có thể đưa về dạng chính tắc $c_1x_1^2 + \dots + c_rx_r^2$ bằng vô số phép biến đổi về các ẩn. Tuy nhiên, dù bản thân các hệ số $c_1, \dots, c_r$ có thể phụ thuộc vào các phép biến đổi đó, nhưng số các hệ số dương và số các hệ số âm trong chúng không phụ thuộc vào các phép biến đổi đó và được xác định duy nhất bởi bản thân phép biến đổi ban đầu.

Mệnh đề này thường được gọi là *luật quán tính* và số s thường được gọi là *ký số* của dạng toàn phương.

240. Tìm dạng chính tắc thực của các dạng toàn phương sau :

a) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

b) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;

c) $x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$;

d) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$;

e) $x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 +$
$+ 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$.

241. Tìm dạng chính tắc và phép biến đổi tuyến tính không suy biến đưa các dạng toàn phương sau đây về dạng chính tắc đó (vì phép biến đổi tuyến tính phải tìm không duy nhất nên kết quả tìm được có thể khác với đáp số) :

a) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;

b) $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;

c) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$;

d) $2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3$;

e) $-12x_1^2 - 3x_2^2 - 12x_3^2 + 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 8x_2x_3$;

f) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$.

242. Đưa các dạng toàn phương sau về dạng chính tắc và biểu thị các ẩn mới qua các ẩn cũ (kết quả không duy nhất):

a) $\sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j x_i x_j$ không phải mọi $a_1, \ldots, a_n$ bằng 0;

b) $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i<j}^{n} x_i x_j$;

c) $\sum_{i<j}^{n} x_i x_j$;

d) $\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$;

e) $\sum_{i=1}^{n} (x_i - s)^2$, trong đó $s = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$;

f) $\sum_{i<j}^{n} |i - j| x_i x_j$.

243. Những dạng toàn phương nào trong các dạng sau đây là tương đương với nhau (tức là có thể biến đổi từ dạng này về dạng kia nhờ một phép biến đổi tuyến tính, có thể suy biến):

a) $f_1 = x_1^2 - x_2 x_3$,

$f_2 = y_1 y_2 - y_3^2$,

$f_3 = z_1 z_2 + z_3^2$;

b) $f_1 = x_1^2 + 4x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3$.

$f_2 = y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2 + 4y_1y_2 - 2y_1y_3 - 4y_2y_3$.

$f_3 = -4z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - 4z_1z_2 + 4z_1z_3 + 18z_2z_3$.

244. a) Chứng minh rằng tất cả các dạng toàn phương của n ẩn có thể chia thành các lớp sao cho hai dạng tương đương khi và chỉ khi chúng thuộc cùng một lớp. Tìm số các lớp đó trên trường số phức và trường số thực.

b) Các giá trị nào của hạng và ký số đặc trưng cho các lớp các dạng toàn phương thực tương đương sao cho đối với chúng dạng f tương đương với dạng $-f$.

c) Tìm số các lớp tương đương của các dạng toàn phương n ẩn trên trường số thực có ký số s đã cho.

245. Chứng minh rằng một dạng toàn phương hoặc dạng toàn phương Ecmit của n ẩn với mà trận A là không âm khi và chỉ khi các hệ số của đa thức đặc trưng của ma trận A có dấu đan nhau. Khi đó nếu một hệ số nào đó bằng không thì tất cả các hệ số của các số hạng bé cũng bằng 0 (dấu hiệu Jacôbi).

246. Chứng minh rằng :

a) Một dạng toàn phương f là xác định dương khi và chỉ khi tất cả các định thức con chính của ma trận của nó đều dương.

b) Một dạng toàn phương f là không âm khi và chỉ khi tất cả các định thức con chính của ma trận của nó đều không âm.

c) Tìm một số ví dụ để chứng tỏ rằng điều kiện tất cả các định thức con góc không âm không đủ để dạng không âm (ta gọi *định thức con góc* cấp k là định thức tạo bởi k hàng đầu và k cột đầu, còn *định thức con chính* là định thức con có số hiệu các hàng và các cột như nhau).

247. Tìm tất cả các giá trị của λ sao cho các dạng toàn phương sau xác định dương :

a) $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

b) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$;

c) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

d) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$.

248. Ta gọi là *biệt thức* D_f của dạng toàn phương f, định thức của ma trận của nó. Chứng minh rằng :

a) Nếu thêm vào dạng toàn phương xác định dương $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ một bình phương của một dạng tuyến tính khác 0 cũng của các ẩn đó thì biệt thức của dạng tăng lên.

b) Giả sử $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ là một dạng toàn phương xác định dương và $\varphi(x_2, \ldots, x_n) = f(0, x_2, \ldots, x_n)$. Thế thì đối với biệt thức của các dạng đó ta có

$$D_f \leqslant a_{11}D_\varphi$$

c) Nếu một dạng toàn phương không âm bằng 0 ít nhất tại một bộ giá trị thực khác không của các ẩn thì dạng đó suy biến (tức là biệt thức của nó bằng không).

249. Phép biến đổi tam giác là phép biến đổi tuyến tính dạng :

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n \\ y_2 &= \qquad\;\; x_2 + c_{23}x_3 + \ldots c_{2n}x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_n. \end{aligned}$$

Chứng minh rằng :

a) Phép biến đổi tam giác không suy biến và phép biến đổi nghịch đảo của phép biến đổi tam giác cũng là một phép biến đổi tam giác.

b) Các định thức con góc $D_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ của dạng toàn phương $f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ không thay đổi qua phép biến đổi tam giác.

250. Chứng minh rằng (định lý Xinvestơrơ):

a) Một dạng toàn phương hạng r : $f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ có thể đưa về dạng

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2, \qquad (1)$$

trong đó $\lambda_k \neq 0 \ (k = 1, \ldots, r)$, nhờ một phép biến đổi tam giác khi và chỉ khi

$$D_k \neq 0 \ (k \leqslant r); \ D_k = 0 \ (k > r), \qquad (2)$$

trong đó $D_k (k = 1, \ldots, n)$ là các định thức con góc của dạng f.

b) Dạng chính tắc nói trên được xác định duy nhất và các hệ số của nó được xác định theo công thức

$$\lambda_k = \frac{D_k}{D_{k-1}} (k = 1, 2, \ldots, r ; D_0 = 1). \qquad (3)$$

251. a) Chứng minh rằng dạng chính tắc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$ mà dạng toàn phương f có thể đưa về bởi một phép biến đổi trực giao được xác định một cách duy nhất; và các hệ số $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ của nó là các nghiệm của phương trình đặc trưng $| A - \lambda E | = 0$ của ma trận A của dạng f.

b) Áp dụng : Tìm dạng chính tắc của dạng toàn phương sau nhờ các phép biến đổi trực giao (không tìm phép biến đổi ấy) :

$$f = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1 x_2 + 4x_1 x_3 - 2x_2 x_3.$$

252. Cũng câu hỏi như trên đối với các dạng sau:

a) $7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

b) $x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

c) $3x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$;

d) $\sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1}$.

253. Tìm dạng chính tắc của các dạng toàn phương sau và phép biến đổi trực giao đưa chúng về dạng chính tắc (phép biến đổi này không duy nhất):

a) $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3$;

b) $11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$;

c) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

d) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;

e) $17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$.

254. Tìm dạng chính tắc của các dạng toàn phương sau nhờ các phép biến đổi trực giao và biểu thị các ẩn mới qua các ẩn cũ (phép biến đổi tìm được không duy nhất):

a) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum\limits_{i<j}^{n} x_i x_j$;

b) $\sum\limits_{i<j}^{n} x_i x_j$.

255. Hai dạng toàn phương được gọi là *tương đương trực giao* nếu có thể biến dạng này thành dạng kia nhờ một phép biến đổi trực giao.

a) Chứng minh rằng hai dạng toàn phương tương đương trực giao khi và chỉ khi các đa thức đặc trưng của các ma trận của chúng trùng nhau.

b) Áp dụng: Những dạng nào trong các dạng sau là tương đương trực giao:

$$f = 9x_2^2 + 9x_3^2 + 12x_1x_2 + 12x_1x_3 - 6x_2x_3,$$
$$g = -3y_1^2 + 6y_2^2 + 6y_3^2 - 12y_1y_2 + 12y_1y_3 + 6y_2y_3,$$
$$h = 11z_1^2 - 4z_2^2 + 11z_3^2 + 8z_1z_2 - 2z_1z_3 + 8z_2z_3.$$

c) Tương tự như câu trên, đối với các dạng:

$$f = 7x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 16x_2x_3,$$
$$g = \frac{2}{3}y_1^2 - \frac{1}{3}y_2^2 - \frac{1}{3}y_3^2 - \frac{4}{3}y_1y_2 + \frac{4}{3}y_1y_3 + \frac{8}{3}y_2y_3,$$
$$h = z_2^2 - z_3^2 + 2\sqrt{2}\,z_1z_2.$$

256. Đối với các ma trận sau, tìm ma trận trực giao Q và ma trận chéo B sao cho ma trận đã cho có thể biểu diễn được dưới dạng $Q^{-1}BQ$:

$$\text{a)}\ \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{b)}\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

257. a) Chứng minh rằng các hệ số của đa thức đặc trưng $|A - \lambda E|$ của ma trận A đều biểu thị được qua các phần tử của ma trận đó như sau:

$$|A - \lambda E| = (-\lambda)^n + c_1(-\lambda)^{n-1} + c_2(-\lambda)^{n-2} + \dots + c_n,$$

trong đó c_k là tổng tất cả các định thức con chính cấp k của ma trận A.

biến x_i'' nhờ ma trận T_2, ... thì ma trận của phép biến đổi từ các biến x_i tới các biến $x_i^{(m)}$ là tích $T_m T_{m-1} \ldots T_2 T_1$.

b) Áp dụng: Đưa dạng sau về dạng đơn giản nhất:

$$F = x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 10x_2x_3$$

với các phép biến đổi:

$$x_1' = x_1 - x_2 - x_3,\ x_2' = x_2,\ x_3' = x_3$$

và

$$x_1'' = x_1',\ x_2'' = x_2' - 4x_3',\ x_3'' = 4x_3'.$$

Tìm phép biến đổi đưa các x_i về x_i'', $i = 1, 2, \ldots, n$.

232. Hai ma trận A và A_1 được gọi là tương đương trên trường K nếu tồn tại các ma trận không suy biến P, Q với phần tử thuộc K sao cho $A_1 = PAQ$. Chứng minh rằng:

a) Điều kiện ắt có và đủ để các dạng song tuyến tính trên trường tùy ý tương đương là các ma trận của chúng tương đương.

b) Các dạng song tuyến tính trên một trường tùy ý là tương đương khi và chỉ khi cấp và hạng của các ma trận của chúng tương ứng trùng nhau.

233. Chứng minh rằng:

a) Nếu trong một dạng song tuyến tính với ma trận A ta thực hiện một phép biến đổi tuyến tính với ma trận T trên cả hai hệ thống ẩn thì dạng mới có ma trận là $A_1 = TAT'$.

b) Nếu một dạng song tuyến tính là đối xứng hoặc phản xứng thì tất cả các dạng tương đẳng của nó cũng có tính chất ấy.

234. a) Giả sử $F(x, y)$ là một dạng song tuyến tính Ecmit có ma trận A và ta đã dùng các phép biến đổi trên

các hệ thống ẩn $[x_i]$ và $[y_i]$ với các ma trận T và S tương ứng. Tìm ma trận của dạng mới.

b) Chứng minh rằng nếu một dạng song tuyến tính đã cho là đối xứng Ecmit thì tất cả các dạng tương đẳng với nó cũng đối xứng Ecmit.

235. Chứng minh rằng:

a) Tất cả các dạng song tuyến tính ecmit của hai hệ thống n ẩn đều tương đương với dạng

$$x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + \ldots + x_r\overline{y}_r,$$

trong đó r là hạng của các dạng đã cho.

b) Mỗi dạng song tuyến tính thực đều có thể dùng một phép biến đổi unita thực (tức là $U^{-1} = U'$) thích hợp để đưa về dạng

$$c_1x_1y_1 + c_2x_2y_2 + \ldots + c_rx_ry_r,$$

trong đó r là hạng của dạng, còn $c_1, \ldots, c_r$ là các số đặc trưng khác 0 của ma trận của dạng.

c) Hai dạng song tuyến tính đối xứng thực là tương đương khi và chỉ khi các đa thức đặc trưng của các ma trận của chúng trùng nhau.

236. Chứng minh rằng:

a) Mọi dạng song tuyến tính đối xứng Ecmit có thể đưa về dạng chéo:

$$c_1x_1y_1 + c_2x_2y_2 + \ldots + c_rx_ry_r$$

với số thực nhờ một phép biến đổi tuyến tính unita về các ẩn; trong đó $c_1, \ldots, c_r$ là các nghiệm phân biệt khác không của đa thức đặc trưng của ma trận của dạng.

b) Hai dạng song tuyến tính đối xứng Ecmit là tương đẳng unita khi và chỉ khi các đa thức đặc trưng của các ma trận của chúng trùng nhau.

263. Chứng minh rằng:

a) Mỗi cặp dạng toàn phương thực của n biến mà dạng thứ nhất trong chúng là xác định dương có thể đưa được về cặp dạng chính tắc

$$x_1^2 + \dots + x_n^2, \quad c_1x_1^2 + \dots + c_nx_n^2$$

nhờ một phép biến đổi tuyến tính thực thích hợp. Các số $c_1, \dots, c_n$ được xác định duy nhất (sai khác thứ tự) bởi các dạng ban đầu và không phụ thuộc phép biến đổi các ẩn.

b) Mỗi cặp dạng toàn phương Ecmit, trong đó dạng thứ nhất xác định dương, có thể đưa về cặp dạng

$$x_1 \overline{x_1} + \dots + x_n \overline{x_n}; \quad c_1 x_1 \overline{x_1} + \dots + c_n x_n \overline{x_n}$$

nhờ một phép biến đổi tuyến tính phức thích hợp, trong đó các số $c_1, \dots, c_n$ được xác định duy nhất bởi các dạng xuất phát và không phụ thuộc vào phép biến đổi.

264. Giả sử cho hai cặp dạng toàn phương F, G và F_1, G_1, trong đó các ma trận thứ nhất F, F_1 hoặc cả hai đều đối xứng hoặc cả hai đều phản xứng và các ma trận thứ hai G, G_1 cũng hoặc cả hai đều đối xứng, hoặc cả hai đều phản xứng. Chứng minh rằng trên trường số phức, các cặp dạng đó tương đẳng khi và chỉ khi chúng tương đương.

265. Giả sử đã cho hai cặp ma trận F, G và F_1, G_1. Giả sử F, F_1 không suy biến và hoặc cả hai đều đối xứng, hoặc cả hai đều phản xứng, và nếu G, G_1 cũng hoặc cả hai đều đối xứng, hoặc cả hai đều phản xứng. Chứng minh rằng các cặp F, G và F_1, G_1 là tương đẳng trên trường số phức khi và chỉ khi các nhân tử bất biến của các ma trận $\lambda F - G$ và $\lambda F_1 - G_1$ trùng nhau.

266. Chứng minh rằng các dạng song tuyến tính phức không suy biến với các ma trận là G và G_1 là tương đẳng với nhau khi và chỉ khi các ước sơ cấp của các λ — ma trận $\lambda G - G'$ và $\lambda G_1 - G_1'$ trùng nhau.

267. Trong các cặp dạng toàn phương sau đây, một dạng là xác định dương : tìm phép biến đổi tuyến tính không suy biến đưa dạng đó về dạng chuẩn tắc và đưa dạng kia về dạng chính tắc và viết dạng chính tắc đó (phép biến đổi tuyến tính không duy nhất) :

a) $f = -4x_1x_2$,

$g = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2$;

b) $f = x_1^2 - 26x_2^2 + 10x_1x_2$,

$g = x_1^2 + 56x_2^2 + 16x_1x_2$;

c) $f = 8x_1^2 - 28x_2^2 + 14x_3^2 + 16x_1x_2 + 14x_1x_3 + 32x_2x_3$,

$g = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3$;

d) $f = 2x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4$,

$g = \frac{1}{4}x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_2x_4$.

268. Cũng câu hỏi trên đối với các cặp dạng :

a) $f = x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 - 2x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$,

$g = x_1^2 + \frac{5}{4}x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_2x_3$;

b) $f = x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$,

$g = x_1^2 + 17x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 14x_2x_3$.

269. Có thể đưa các cặp dạng toàn phương sau đây về dạng chính tắc nhờ một phép biến đổi tuyến tính thực được không ?

a) $f = x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2$,

$g = x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2$;

b) $f = x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$,

$g = x_1^2 - 2x_1x_2$.

270. Giả sử đã cho hai dạng xác định dương f và g và giả sử một phép biến đổi tuyến tính đưa dạng f về dạng $\sum_{i=1}^{n} c_i y_i^2$ và đưa dạng g về dạng chuẩn tắc, còn phép biến đổi thứ hai thì ngược lại: đưa dạng f về dạng chuẩn tắc còn đưa dạng g về dạng $\sum_{i=1}^{n} d_i z_i^2$. Tìm mối liên hệ giữa các hệ số $c_1, \ldots, c_n$; $d_1, \ldots, d_n$.

271. Không tìm phép biến đổi tuyến tính, hãy tìm dạng chính tắc của dạng f thu được khi dùng phép biến đổi để đưa dạng $g > 0$ kia về dạng chuẩn tắc:

a) $f = 21x_1^2 - 18x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_2 + 28x_1x_3 + 6x_2x_3$,
$g = 11x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 - 12x_1x_2 + 12x_1x_3 - 6x_2x_3$;

b) $f = 14x_1^2 - 4x_2^2 + 17x_3^2 + 8x_1x_2 - 40x_1x_3 - 26x_2x_3$,
$g = 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2x_3$.

272. Các cặp dạng sau đây có tương đương nhau không (không tìm phép biến đổi tuyến tính đưa cặp này về cặp kia):

a) $f_1 = 2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$,
$g_1 = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3$.
$f_2 = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$,
$g_2 = x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$;

b) $f_1 = 4x_1^2 + 6x_2^2 + 21x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 -$
$- 22x_2x_3,$

$g_1 = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 -$
$- 6x_2x_3,$

$f_2 = 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 - 6x_1x_2 - 6x_1x_3 +$
$+ 12x_2x_3,$

$g_2 = 9x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 6x_1x_2 - 6x_1x_3 +$
$+ 2x_2x_3.$

273. Tìm phép biến đổi tuyến tính biến cặp dạng toàn phương f_1, g_1 thành cặp dạng f_2, g_2 (kết quả không duy nhất) :

a) $f_1 = 2x_1^2 - 7x_2^2 + 2x_1x_2,$
$g_1 = 2x_1^2 + 13x_2^2 + 10x_1x_2,$
$f_2 = -7y_1^2 - 3y_2^2 - 12y_1y_2,$
$g_2 = 13y_1^2 + 25y_2^2 - 36y_1y_2;$

b) $f_1 = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 10x_1x_2,$
$g_1 = 2x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2,$
$f_2 = -9y_1^2 - 20y_2^2 - 44y_1y_2,$
$g_2 = 29y_2^1 + 4y_2^2 + 20y_1y_2.$

§4. HÀM SONG TUYẾN TÍNH

274. Chứng minh rằng :

a) Nếu trong một cơ sở nào đó ma trận của một hàm song tuyến tính là A thi trong cơ sở mới ma trận của hàm đó là $A_1 = TAT'$, trong đó T là ma trận chuyển từ cơ sở cũ sang cơ sở mới.

b) Các dạng song tuyến tính tương đẳng nhau có thể xem như các dạng song tuyến tính của cùng một hàm song tuyến tính nhưng tính trong các cơ sở khác nhau.

c) Một hàm song tuyến tính bất kỳ có thể biểu diễn thành tổng của một hàm đối xứng và một hàm phản xứng và sự biểu diễn đó là duy nhất.

d) Mỗi hàm toàn phương được suy ra từ một và chỉ một hàm song tuyến tính đối xứng (gọi là *hàm cực* của nó).

e) Mỗi hàm toàn phương ecmit được suy ra từ một và chỉ một hàm song tuyến tính đối xứng ecmit.

275. Chứng minh rằng:

a) Tập hợp tất cả các vectơ đẳng hướng bên trái (bên phải) của không gian mêtric song tuyến tính $\mathcal{L}$ lập thành một không gian con, ký hiệu là ${}^{\perp}\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}^{\perp}$), nó được gọi là không gian con đẳng hướng bên trái (bên phải).

b) Số chiều của không gian con đẳng hướng bên trái và bên phải bằng nhau và bằng số khuyết của ma trận của dạng mêtric (x, y) tính trong một cơ sở nào đó.

c) Hiệu giữa số chiều của không gian và số chiều của các không gian con đẳng hướng bằng hạng của dạng song tuyến tính mêtric.

d) Không gian mêtric song tuyến tính là không gian suy biến khi và chỉ khi nó không chứa các vectơ đẳng hướng khác 0.

276. Chứng minh rằng: Nếu $\mathcal{A}$ là một không gian con không suy biến của không gian $\mathcal{L}$ thì đối với $\mathcal{L}$ có sự phân tích trực tiếp

$$\mathcal{L} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}^{\perp} = {}^{\perp}\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}. \qquad (1)$$

Đảo lại, nếu ít nhất một trong các phân tích (1) đúng thì không gian con $\mathcal{A}$ không suy biến.

277. Chứng minh rằng các không gian mêtric song tuyến tính trên cùng một trường đẳng cấu với nhau khi và chỉ khi các ma trận Gram của các cơ sở tùy ý chọn trong các không gian đó tương đẳng với nhau.

278. Chứng minh rằng :

a) Các không gian giả ơclit được xác định bởi số chiều và ký số của chúng sai khác một đẳng cấu (ta gọi ký số $\sigma = s - (n - s)$, trong đó s là số hệ số dương trong dạng chuẩn của hàm song tuyến tính mêtric).

b) Số chiều của không gian đơn hình luôn luôn là số chẵn và đối với mỗi n, tồn tại chỉ một không gian đơn hình $2n$ chiều sai khác một đẳng cấu. Trong mỗi không gian đơn hình $2n$ chiều tồn tại một cơ sở sao cho trong đó tích vô hướng có dạng

$$(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1 + \dots + x_{2n-1}y_{2n} - x_{2n}y_{2n-1},$$

trong đó $x_1, \dots, x_{2n}$ và $y_1, \dots, y_{n2}$ là các tọa độ của x và y

c) Với mỗi n, tồn tại chỉ một (sai khác một đẳng cấu) không gian ơclit phức n chiều. Trong mỗi không gian ơclit phức n chiều, tồn tại một cơ sở sao cho trên đó tích vô hướng có dạng :

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

d) Trong mỗi không gian giả unita n chiều, tồn tại một cơ sở sao cho trên đó tích vô hướng có dạng

$$(x, y) = x_1\overline{y_1} + \dots + x_s\overline{y_s} - x_{s+1}\overline{y_{s+1}} - \dots - x_n\overline{y_n}.$$

279. Giả sử $\mathcal{L}$ là một không gian mêtric song tuyến tính không suy biến (thường hoặc ecmit). Chứng minh rằng :

a) Mỗi hàm tuyến tính $f(x)$ xác định trên không gian $\mathcal{L}$ có thể biểu diễn bởi một và chỉ một cách dưới dạng (x, a), trong đó a là một vectơ xác định thuộc $\mathcal{L}$.

b) Phép biến đổi liên hợp bên phải $\mathcal{A}^*$ được xác định một cách duy nhất bởi $\mathcal{A}$.

c) $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$,

$(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$,

$(c\mathcal{A})^* = c\mathcal{A}^*$ hoặc $\overline{c}\mathcal{A}^*$

(tùy theo $\mathcal{L}$ là không gian mêtric song tuyến tính thường hoặc ecmit).

d) Tìm mối liên hệ giữa ma trận của các phép biến đổi $\mathcal{A}$ và $\mathcal{A}^*$.

280. Giả sử $\mathcal{L}$ là không gian mêtric song tuyến tính không suy biến (thường hoặc ecmit).

Chứng minh rằng :

a) Nếu mêtric của không gian $\mathcal{L}$ đối xứng hoặc phản xứng thì $\mathcal{A}^* = {}^*\mathcal{A}$ đối với mọi phép biến đổi tuyến tính $\mathcal{A}$.

b) Nếu các phép biến đổi tuyến tính $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ khác nhau thì các hàm song tuyến tính $(x\mathcal{A}, y)$ và $(x\mathcal{B}, y)$ cũng khác nhau.

c) Một hàm song tuyến tính bất kỳ $f(x, y)$ xác định trên $\mathcal{L}$ có thể biểu diễn được dưới dạng $(x\mathcal{A}, y)$, trong đó $\mathcal{A}$ là một phép biến đổi tuyến tính của không gian $\mathcal{L}$.

281. Giả sử $\mathcal{L}$ là không gian không suy biến thường hoặc ecmit.

Chứng minh rằng :

a) Nếu mêtric của không gian $\mathcal{L}$ đối xứng thì các hàm song tuyến tính đối xứng ứng với các phép biến đổi tuyến tính đối xứng của $\mathcal{L}$, còn các hàm song tuyến tính phản xứng ứng với các phép biến đổi phản xứng.

b) Nếu mêtric của không gian $\mathcal{L}$ phản xứng thì trái lại các hàm phản xứng ứng với các phép biến đổi đối xứng, còn các hàm đối xứng ứng với các phép biến đổi phản xứng.

CHƯƠNG VI

NỬA NHÓM

Một phép toán (hai ngôi) trên một tập S là một ánh xạ từ tập $S \times S$ tới tập S. Nếu ánh xạ đó được ký hiệu bởi dấu chấm (.) thì ảnh của phần tử $(a, b) \in S \times S$ trong S được ký hiệu bởi $a . b$. Thường ta gọi phép toán như vậy là phép nhân và bỏ dấu chấm đi, viết đơn giản là ab. Ta cũng dùng các ký hiệu $-$, $\times$, o, $*$,... để chỉ các phép toán.

Phép toán (.) trên một tập S được gọi là có *tính kết hợp* nếu $a . (b.c) = (a.b). c$ với mọi $a, b, c \in S$.

Một *nửa nhóm* là một tập S trên đó đã xác định một phép toán có tính kết hợp.

Một tập con T của một nửa nhóm S được gọi là một *nửa nhóm con* của nửa nhóm S (đối với phép toán đã cho của nửa nhóm S) nếu từ $a, b \in T$ suy ra $ab \in T$. Giả sử A là một tập con khác rỗng của một nửa nhóm S thì giao của tất cả các nửa nhóm con của S chứa A (trong đó có bản thân S) là một nửa nhóm con của nửa nhóm S chứa A và được chứa trong mọi nửa nhóm con của S chứa A. Ta ký hiệu nửa nhóm con đó là $\langle A \rangle$ và gọi là *nửa nhóm con sinh bởi* tập A. Nếu $\langle A \rangle = S$ thì A được gọi là một *hệ sinh* của nửa nhóm S.

Nếu A, B là các tập con khác rỗng của một nửa nhóm S (với phép toán nhân) thì tích AB được định nghĩa là:

$$AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}.$$

Một tập con A của một nửa nhóm S được gọi là một *iđêan trái* [*phải*] của nửa nhóm S nếu $SA \subset A$ [$AS \subset A$]. Một *iđêan* (hoặc một iđêan hai phía) của một nửa nhóm S là một tập con của S vừa là iđêan trái vừa là iđêan phải của S.

được nếu với các phần tử x, y tùy ý thuộc S từ hệ thức $ax = ay$ suy ra $x = y$. Tương tự ta cũng định nghĩa phần tử a giản ước phải được nếu từ $xa = ya$ suy ra $x = y$. Phần tử $a \in S$ gọi là phần tử *giản ước được* nếu nó vừa giản ước trái được vừa giản ước phải được.

Phần tử e của một nửa nhóm S được gọi là phần tử *đơn vị trái* [*phải*] của S nếu $ea = a$ [$ae = a$] với mọi $a \in S$. Phần tử e được gọi là phần tử *đơn vị* nếu nó vừa là đơn vị phải vừa là đơn vị trái.

Phần tử x của một nửa nhóm S được gọi là một phần tử *lũy đẳng* nếu : $x^2 = x$.

Phần tử $u \in S$ được gọi là *phần tử không bên trái* [*phần tử không bên phải* ; *phần tử không*] của nửa nhóm S nếu $ua = u$ [$au = u$; $au = ua = u$] với mọi $a \in S$.

Một ánh xạ φ từ một nửa nhóm S tới một nửa nhóm S' được gọi là một *đồng cấu*, nếu $\varphi(ab) = \varphi(a)\,\varphi(b)$ với mọi $a, b \in S$. Nếu ngoài ra φ còn là một đơn ánh [toàn ánh, song ánh] từ S tới S' thì đồng cấu φ được gọi là *đơn cấu* [*toàn cấu*, *đẳng cấu*] từ nửa nhóm S tới nửa nhóm S'.

Một quan hệ tương đương ρ trên nửa nhóm S được gọi là một *tương đẳng phải* trên S nếu $(a, b) \in \rho$ kéo theo $(ac, bc) \in \rho$ với mọi $c \in S$. Tương tự quan hệ tương đương ρ được gọi là một *tương đẳng trái* trên S nếu $(a, b) \in \rho$ kéo theo $(ca, cb) \in \rho$ với mọi $c \in S$ và quan hệ tương đương ρ trên S được gọi là một tương đẳng nếu ρ vừa là tương đẳng trái vừa là tương đẳng phải trên S.

Nếu đã cho một tương đẳng ρ trên một nửa nhóm S thì ta lập tập thương S/ρ gồm các lớp tương đương theo quan hệ ρ. Giả sử $A, B \in S/\rho$, tức là A và B là hai lớp tương đương tùy ý của S theo quan hệ ρ. Nếu $a_1, a_2 \in A$, $b_1 b_2 \in B$ thì $(a_1 b_1, a_2 b_2) \in \rho$, do đó tích AB của hai lớp A và B được chứa trong một lớp tương đương C của S theo quan hệ ρ. Ta định nghĩa phép toán (o) trên S/ρ bằng cách đặt

$A.B = C$. Thế thì S/ρ là một nửa nhóm, gọi là nửa nhóm thương của S theo tương đẳng ρ.

Giả sử S/ρ là một nửa nhóm thương của nửa nhóm theo tương đẳng ρ. Thế thì ánh xạ $\varphi : S \rightrightarrows S/\rho$ đặt tương ứng mỗi phần tử $x \in S$ với lớp tương đương chứa x là một đồng cấu, gọi là *đồng cấu chính tắc* từ nửa nhóm S tới nửa nhóm thương S/ρ.

§ 1. PHÉP TOÁN ĐẠI SỐ

282. Trên tập N các số nguyên dương ta định nghĩa một phép toán (o) như sau :

$$m \circ n = m^n,\ m, n \in N.$$

a) Chứng tỏ rằng $(m \circ n) \circ p = m \circ (n \circ p)$ khi và chỉ khi m, n, p thỏa mãn trong các điều kiện :

(i) $m = 1$; n, p tùy ý thuộc N,

(ii) $p = 1$: m, n tùy ý thuộc N.

(iii) $n = p = 2$; m tùy ý thuộc N.

b) Tìm các số m, n thỏa mãn $m \circ n = n \circ m$.

283. Cho một tập A có n phần tử, $2 \leqslant n \leqslant 5$.

a) Hãy xác định trên tập A các phép toán hai ngôi có các tính chất : (i) đối với chúng tồn tại phần tử đơn vị trong tập A, (ii) có thể giản ước cho mỗi phần tử thuộc A.

b) Chứng tỏ rằng với $n = 5$ tồn tại những phép toán không kết hợp trên tập A thỏa mãn các điều kiện trong câu a).

284. Giả sử A là một tập trên đó đã xác định một phép toán kết hợp (*). Ta định nghĩa phép tịnh tiến trái γ_a ứng với phần tử $a \in A$ là ánh xạ từ A vào chính nó xác định bởi

$$\gamma_a(x) = a * x \text{ với mọi } x \in A.$$

a) Giả sử phần tử $a \in A$ có tính chất là phép tĩnh tiến trái γ_a là một đơn ánh từ A vào A. Chứng tỏ rằng nếu tồn tại một phần tử $u \in A$ mà $a * u = a$ thì u là phần tử đơn vị trái trong A đối với phép toán ($*$). Nếu tồn tại một phần tử $v \in A$ mà $a * v = a$ và một phần tử $b \in A$ mà $a * b = v$ thì $b * a = v$.

b) Giả sử phần tử $a \in A$ có tính chất là phép tĩnh tiến γ_a là một toàn ánh từ A lên A. Chứng tỏ rằng nếu tồn tại một phần tử $u \in A$ mà $u * a = a$ thì $u * x = x$ với mọi $x \in A$.

c) Chứng minh rằng điều kiện ắt có và đủ để phép toán ($*$) trên A có tính kết hợp là mỗi phép tĩnh tiến trái γ_x giao hoán với mỗi phép tĩnh tiến phải δ_y (δ_y được gọi là phép tĩnh tiến phải nếu với mọi $u \in A$ ta có $\delta_y(u) = u * y$).

285. Giả sử A là một tập trên đó đã xác định một phép toán nhân. Ánh xạ $\delta : A \to A$ được gọi là một phép *chuyển dịch phải* của A nếu $\delta(ab) = a \cdot \delta(b)$ với mọi $a, b \in A$. Tương tự ánh xạ $\gamma : A \to A$ được gọi là một phép chuyển dịch trái của A nếu $\gamma(ab) = \gamma(a) \cdot b$ với mọi $a, b \in A$. Chứng minh rằng :

a) Nếu $x \in A$ và δ_x, γ_x tương ứng là các phép tĩnh tiến phải và trái của A ứng với x thì

$$\delta \cdot \delta_x = \delta_{\delta(x)}$$

$$\gamma \cdot \gamma_x = \gamma_{\gamma(x)}$$

b) Ánh xạ $\gamma : A \to A$ là một phép chuyển dịch trái của A khi và chỉ khi nó giao hoán với mỗi phép tĩnh tiến phải của A.

c) Phép toán trên A có tính kết hợp khi và chỉ khi mỗi phép tĩnh tiến phải của A là một phép chuyển dịch phải.

286. Giả sử S là một tập trên đó đã xác định một phép toán nhân. Chứng minh rằng chỉ xảy ra một trong bốn khả năng sau đây :

(1) S không có đơn vị phải và đơn vị trái.

(2) S có ít nhất một đơn vị trái nhưng không có đơn vị phải nào.

(3) S có ít nhất một đơn vị phải nhưng không có đơn vị trái nào.

(4) S có một đơn vị (hai phía) duy nhất và không có đơn vị phải và đơn vị trái nào khác.

287. Giả sử S là tập tất cả các số thực nằm trong đoạn $[0, 1]$. Ta định nghĩa phép toán (o) trên tập S như sau :

$$a \circ b = a + b - ab, \; a, b \in S,$$

trong đó $+$, $-$, $.$ ở vế phải là các phép cộng, trừ, nhân các số thực. Chứng minh rằng :

a) Phép toán (o) có tính kết hợp.

b) Nếu $a, b \in S$ mà $a \leqslant b$ thì $a \circ c \leqslant b \circ c$ và $c \circ a \leqslant c \circ b$ với mọi $c \in S$.

288. Cho S là tập tất cả các số thực nằm trong đoạn $[0, 1]$. Ta định nghĩa phép toán $(*)$ trên tập S như sau :

$$a * b = \frac{a + b}{1 + ab}, \; a, b \in S,$$

trong đó các phép toán trong biểu thức ở vế phải là các phép cộng, nhân, chia số thực. Chứng minh rằng :

a) Phép toán $(*)$ có tính kết hợp và S chứa phần tử đơn vị đối với phép toán $(*)$.

b) Nếu $a, b \in S$ mà $a \leqslant b$ thì $a * c \leqslant b * c$ và $c * a \leqslant c * b$ với mọi $c \in S$.

289. Giả sử $G = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ là tập tất cả các cặp số thực. Trên tập G ta định nghĩa phép toán $(*)$ sau đây :

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, e^{x_2} y_1 + y_2).$$

trong đó ở vế phải là các phép cộng, nhân và lấy lũy thừa cơ số e trên tập số thực.

a) Chứng minh rằng phép toán (*) có tính kết hợp và tập G chứa phần tử đơn vị đối với phép toán đó.

b) Với mỗi phần tử $(x, y) \in G$ hãy tìm phần tử nghịch đảo đối với phép toán (*).

c) Trên tập G ta định nghĩa một quan hệ $\leqslant$ như sau :

$(x, y) \leqslant (x', y')$ khi và chỉ khi $x < x'$ hoặc

$$x = x' \text{ và } y \leqslant y'.$$

Chứng minh rằng nếu $(x, y) \leqslant (x', y')$ thì

$$(x, y) * (a, b) \leqslant (x', y') * (a, b) \text{ và}$$
$$(a, b) * (x, y) \leqslant (a, b) * (x', y')$$

với mọi $(a, b) \in G$.

290. Giả sử S là tập tất cả các số thực nằm trong đoạn $[0, 1]$. Trên tập S ta định nghĩa phép toán (*) sau đây :

$$a * b = \min (a + b, 1).$$

a) Chứng minh rằng phép toán (*) có tính kết hợp và tập S chứa phần tử đơn vị đối với phép toán (*).

b) Trong tập S có phần tử nào có nghịch đảo đối với phép toán (*) không ?

291. Một tập P trên đó xác định một phép toán nhân được gọi là một *tựa nhóm* nếu với mọi $a, b \in P$ mỗi phương trình $ax = b$ và $ya = b$ có một nghiệm duy nhất.

a) Chứng minh rằng P là một tựa nhóm khi và chỉ khi trên P có thể xác định hai phép toán (o) và (*) khác thỏa mãn các đồng nhất thức sau :

$$a(a \circ b) = b \; ; \; a \circ (ab) = b \; ;$$
$$(b * a) a = b \; ; \; (ba) * a = b.$$

b) Chứng tỏ rằng tập $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ với phép toán nhân cho bởi bảng sau đây là một tựa nhóm :

$\cdot$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	1	5	3	4
3	3	4	1	5	2
4	4	5	2	1	3
5	5	3	4	2	1

292. Giả sử P là một tựa nhóm (xem bài **291**) với phép toán nhân. Ta định nghĩa *hạt nhân trái* của P là tập

$$N_l = \{a \in P \mid a(xy) = (ax)y, \ \forall x, y \in P\}.$$

Tương tự ta định nghĩa *hạt nhân phải* của P là tập :

$$N_r = \{a \in P \mid (xy)a = x(ya), \ \forall x, y \in P\}.$$

Chứng minh rằng :

a) Tựa nhóm P có hạt nhân trái (phải) khác rỗng khi và chỉ khi nó có đơn vị trái (phải).

b) Các hạt nhân trái và phải khác rỗng của P là những nhóm con của P.

293. Cho một hệ thống gồm bốn tập không giao nhau từng đôi một Q, L^1, L^2, L^3. Các phần tử của tập Q được gọi là các *điểm*, các phần tử của các tập L^i, $i = 1, 2, 3$, được gọi là các *đường thẳng*. Giả sử giữa các điểm và đường thẳng có một quan hệ mà ta biểu thị bằng lời là « điểm nằm trên đường thẳng » hay « đường thẳng đi qua điểm ».

Một hệ thống như vậy được gọi là một *lưới* nếu thỏa mãn hai điều kiện :

(i) mỗi điểm nằm trên một và chỉ một đường thẳng của mỗi họ L^i, $i = 1, 2, 3$.

(ii) hai đường thẳng thuộc hai họ khác nhau có một và chỉ một điểm chung. Chứng minh rằng :

a) Trong một lưới hai đường thẳng thuộc cùng một tập L^i không cắt nhau (không có điểm chung).

b) Các họ L^i, $i = 1, 2, 3$, có cùng lực lượng.

c) Nếu P là một tập tùy ý có cùng lực lượng với các tập L^i và nếu ta đánh số các đường thẳng thuộc L^i bởi các phần tử thuộc P theo một cách nào đó thì trên tập P ta có thể xác định một phép toán nhân như sau : ta định nghĩa $ab = c$, $a, b, c \in P$ nếu giao điểm của hai đường thẳng $l_a^1 \in L^1$ và $l_b^2 \in L^2$ nằm trên đường thẳng $l_c^3 \in L^3$. Chứng tỏ rằng đối với phép toán đó P là một tựa nhóm (gọi là *tựa nhóm tọa độ* của lưới đã cho).

d) Mọi tựa nhóm P là tựa nhóm tọa độ của một lưới nào đó.

294. Giả sử P là một tựa nhóm với phép nhân. Ta gọi G là một *tựa nhóm đối xứng* nếu

$$(xy)\,y = x = y\,(yx)$$

với mọi $x, y \in P$. Chứng minh rằng :

a) Mọi tựa nhóm đối xứng đều giao hoán.

b) Nếu ký hiệu nghiệm của phương trình $ax = b$ là $a\backslash b$ và nghiệm của phương trình $ya = b$ là b/a thì tựa nhóm P là một tựa nhóm đối xứng khi và chỉ khi với mọi $x, y \in P$ ta có

$$xy = x/y = y\backslash x.$$

§ 2. NỬA NHÓM

295. Giả sử S là một nửa nhóm với phép toán nhân. Chứng minh rằng :

a) Với mọi phần tử $a, b \in S$ các tập aS, Sb, aSb, SaS đều là những nửa nhóm con của S.

b) Nếu A và B là những nửa nhóm con của nửa nhóm S và nếu $BA \subset AB$ thì AB là một nửa nhóm con của nửa nhóm S.

296. Cho I là tập hợp tất cả các số thực thuộc đoạn $[0, 1]$ và $S = I \cup \{2\}$. Trên tập hợp S ta định nghĩa phép toán (o) sau đây, với mọi $a, b \in S$:

$$a \circ b = \begin{cases} a + b & \text{nếu } a + b \leqslant 1, \\ 2 & \text{nếu } a + b > 1. \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng với phép toán (o) đó S lập thành một nửa nhóm giao hoán có đơn vị.

b) Tìm trong nửa nhóm S những phần tử lũy đẳng, tức là những phần tử $a \in S$ mà $a \circ a = a$.

297. Cho một tập A. Ký hiệu $\mathcal{P}(A)$ là tập tất cả các tập con của tập A. Ta định nghĩa phép toán T trên tập $\mathcal{P}(A)$ như sau : với hai tập con tùy ý X, Y của A

$$X \top Y = \begin{cases} X \cup Y, & \text{nếu } X \cap Y \neq \varnothing, \\ A & , \text{nếu } X \cap Y = \varnothing \end{cases}$$

a) Chứng tỏ rằng với phép toán đó $\mathcal{P}(A)$ lập thành một nửa nhóm giao hoán có đơn vị.

b) Trong nửa nhóm đó có phần tử lũy đẳng nào không ?

298. Nửa nhóm S được gọi là một *nửa nhóm lũy đẳng* nếu mọi phần tử thuộc S đều là phần tử lũy đẳng. Chứng minh rằng :

a) Nếu $A \neq \varnothing$ là một tập tùy ý, $\mathcal{P}(A)$ là tập tất cả các tập con của tập A và nếu trên $\mathcal{P}(A)$ ta xác định phép toán (·) :

$$X \cdot Y = X \cap Y \text{ với mọi } X, Y \in \mathcal{P}(A)$$

thì $\mathcal{P}(A)$ là một nửa nhóm lũy đẳng giao hoán.

b) Mọi nửa nhóm lũy đẳng giao hoán S đẳng cấu với một nửa nhóm con của nửa nhóm lũy đẳng giao hoán $\mathcal{P}(S)$ định nghĩa trong câu a).

c) Nếu S là một nửa nhóm lũy đẳng giao hoán (với phép toán nhân) thì quan hệ $\leqslant$ xác định bởi $x \leqslant y$ khi và chỉ khi $xy = y$, $x, y \in S$ là một quan hệ thứ tự trên tập S.

Đối với quan hệ thứ tự đó chứng tỏ rằng hai phần tử x, y tùy ý thuộc S bao giờ cũng có cận trên bằng xy.

299. Cho một tập X tùy ý. Ký hiệu $\mathcal{J}_X$ là tập tất cả các phép biến đổi của tập X (tức là các ánh xạ từ X tới X). Chứng minh rằng :

a) $\mathcal{J}_X$ là một nửa nhóm có đơn vị với phép toán là phép nhân các ánh xạ, gọi là nửa nhóm tất cả các phép biến đổi của tập X.

b) Phần tử φ thuộc nửa nhóm $\mathcal{J}_X$ là một lũy đẳng khi và chỉ khi cái thu hẹp của phép biến đổi φ trên tập $\varphi(X)$ là phép biến đổi đồng nhất.

300. Phần tử x thuộc nửa nhóm S được gọi là *phần tử không bên trái* [*bên phải*] nếu $xy = x$, [$yx = x$] với mọi $y \in S$.

Chứng minh rằng :

a) Nếu nửa nhóm S chứa phần tử không bên trái [phải] thì tập tất cả các phần tử không bên trái [phải] của S là một nửa nhóm con của S.

b) Các phần tử không bên trái của nửa nhóm $\mathcal{J}_X$ các phép biến đổi của tập X (xem bài **299**) chính là các phép biến đổi biến mọi phần tử của X thành một phần tử cố định đối với phép biến đổi đó.

c) Nếu $|X| > 1$ thì $\mathcal{J}_X$ không chứa phần tử không bên phải.

301. Nửa nhóm S được gọi là một nửa nhóm *giản ước trái được* nếu với mọi $a, x, y \in S$ từ đẳng thức $ax = ay$ suy ra $x = y$. Chứng minh rằng :

a) Trong một nửa nhóm giản ước trái được mọi phần tử lũy đẳng đều là đơn vị trái.

b) Nếu u và v là hai lũy đẳng khác nhau của nửa nhóm S giản ước trái được thì $Su \cap Sv = \phi$ và các nửa nhóm con Su và Sv đẳng cấu với nhau.

302. Nửa nhóm S được gọi là *nửa nhóm xiclic* sinh bởi phần tử $a \in S$, nếu mọi phần tử của S đều là lũy thừa của phần tử a, và được ký hiệu là $S = \langle a \rangle$. Chứng minh rằng:

a) $S = \langle a \rangle$ vô hạn khi và chỉ khi mọi lũy thừa của phần tử a đều khác nhau.

b) Nếu $\langle a \rangle$ hữu hạn thì tồn tại hai số nguyên dương r và m sao cho $a^{m+r} = a^r$ và

$$\langle a \rangle = \{a, a^2, \ldots, a^{m+r-1}\}.$$

c) Tập $K_a = \{a^r, a^{r+1}, \ldots, a^{m+r-1}\}$ là một nhóm con xiclic của nửa nhóm $S = \langle a \rangle$, trong đó r và m xác định như trong câu b).

303. Giả sử X là một tập tùy ý. Ký hiệu F_X là tập tất cả các dãy hữu hạn phần tử của tập X. Trên F_X ta định nghĩa phép nhân là phép ghép liền nhau, nghĩa là nếu $(x_1, \ldots, x_m)$ và $(y_1, \ldots, y_n)$ là các phần tử thuộc F_X thì

$(x_1, \ldots, x_m) \cdot (y_1, \ldots, y_n) = (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$. Chứng minh rằng:

a) Với phép toán đó F_X trở thành một nửa nhóm gọi là *nửa nhóm tự do* trên tập X.

b) Nếu S là một nửa nhóm tùy ý và φ_0 là một ánh xạ tùy ý từ tập X tới tập S thì tồn tại một và chỉ một đồng cấu φ từ nửa nhóm F_X tới nửa nhóm S sao cho cái thu hẹp của φ trên X trùng với φ_0, nếu coi mỗi $x \in X$ đồng nhất với dãy $(x) \in F_X$.

304. Giả sử S là tập tất cả các số phức khác không. Ta định nghĩa phép toán (o) trong tập S như sau :

$$a \circ b = |a| \cdot b \text{ với mọi } a, b \in S.$$

a) Chứng minh rằng với phép toán đó S trở thành một nửa nhóm.

b) Tìm các phần tử lũy đẳng trong nửa nhóm S.

c) Chứng minh rằng với mọi phần tử $a, b \in S$, $a \neq 0$, phương trình $a \circ x = b$ có một nghiệm duy nhất trong S.

305. Giả sử S là tập tất cả các cặp (i, j) các số nguyên không âm i, j. Ta định nghĩa trong S một phép toán nhân như sau :

$$(i, j)(k, l) = (i + k, 2^k j + l)$$

(so sánh với bài **289**).

Chứng minh rằng :

a) Với phép toán đó S là một nửa nhóm chứa đơn vị.

b) Với mọi phần tử $\alpha = (i, j)$ và $\beta = (k, l)$ tùy ý thuộc S ta có $\alpha S \cap \beta S \neq \phi$.

c) Tồn tại những phần tử $\alpha = (i, j)$ và $\beta = (k, l)$ thuộc S sao cho $S\alpha \cap S\beta = \phi$.

306. Cho một tập X tùy ý và tập N^* tất cả các số nguyên không âm. Giả sử F^* là tập tất cả các hàm $\varphi : X \to N^*$ sao cho $\varphi(x) \neq 0$ với ít nhất một và nhiều nhất một số hữu hạn $x \in X$. Ta định nghĩa một phép cộng trong F^* bằng cách đặt :

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

trong đó phép cộng ở vế phải là phép cộng các số nguyên thông thường. Chứng minh rằng :

a) Với phép toán đó F^* là một nửa nhóm giao hoán.

b) Nếu đồng nhất hóa tập X với tập con X^* của F^* gồm những hàm φ_x mà $\varphi_x(x) = 1$ và $\varphi_x(y) = 0$ với $y \neq x$, thì mọi hàm $g : X \to S$ từ tập X vào một nửa nhóm giao

hoán tùy ý S tồn tại một và chỉ một đồng cấu $g^* : F^* \to S$ từ nửa nhóm F^* tới nửa nhóm S sao cho cái thu hẹp của g^* trên X^* trùng với g.

§3. IĐÊAN VÀ TƯƠNG ĐẲNG

307. Nửa nhóm S được gọi là một *nửa nhóm đơn phải* (đơn trái) nếu S không chứa iđêan phải (trái) nào khác S. Chứng minh rằng :

với mọi $a \in S$.

b) Mỗi phần tử lũy đẳng của một nửa nhóm đơn phải là một phần tử đơn vị trái của nó.

308. Giả sử S là một nửa nhóm đơn phải và không chứa lũy đẳng. Chứng minh rằng :

a) Đẳng thức $xy = y$ không thể thỏa mãn với bất kỳ x, y nào thuộc S.

b) Nếu ngoài ra S là một nửa nhóm giản ước phải được (tức là $xa = ya$ kéo theo $x = y$ với mọi $a, x, y \in S$) thì $|S \setminus Ss| = |S|$ với mọi $s \in S$.

309. Giả sử S là tập tất cả các cặp số thực dương.

Ta định nghĩa phép nhân trên S như sau :

$$(a, b) . (c, d) = (ac, bc + d).$$

a, b, c, d là các số thực dương tùy ý và các phép toán ở vế phải là phép cộng và phép nhân số thực. Chứng minh rằng :

a) Với phép toán đó S là một nửa nhóm đơn (tức là không chứa iđêan nào khác S).

b) S không chứa lũy đẳng

c) Tập B tất cả các phần tử dạng $(1, b)$, b thực > 0 là một nửa nhóm con của S đẳng cấu với nửa nhóm cộng các số thực dương.

310. Giả sử S là một nửa nhóm chứa phần tử không bên phải (xem bài 300), và ký hiệu K là tập tất cả các phần tử không bên phải của nửa nhóm S. Chứng minh rằng :

a) K là một iđêan hai phía của nửa nhóm S.

b) Iđêan K được chứa trong mỗi iđêan phải của nửa nhóm S.

311. Cho $\{T_i \mid i \in I\}$ là một họ các iđêan trái (phải, hai phía) của một nửa nhóm S. Chứng minh rằng :

a) Hợp $T = \bigcup_{i \in I} T_i$ cũng là một iđêan trái (phải, hai phía) của nửa nhóm S.

b) Nếu giao $V = \bigcap_{i \in I} T_i \neq \varnothing$ thì V cũng là một iđêan trái (phải, hai phía) của nửa nhóm S.

312. Giả sử I là một iđêan hai phía của một nửa nhóm S. Ta định nghĩa một quan hệ hai ngôi ρ trên S như sau :

Với $a, b \in S$, $(a, b) \in \rho$ khi và chỉ khi hoặc $a = b$ hoặc a và b cùng thuộc I. Chứng minh rằng :

a) ρ là một tương đẳng trên nửa nhóm S, gọi là *tương đẳng Rixơ* theo môđun I.

b) Các lớp tương đương của nửa nhóm S theo tương đẳng ρ là bản thân I và mỗi tập $\{a\}$ gồm một phần tử trong đó $a \in S \setminus I$.

313. Giả sử f là một đồng cấu từ một nửa nhóm S lên một nửa nhóm T. Ta định nghĩa một quan hệ θ trên S như sau : $(a, b) \in \theta$ khi và chỉ khi $f(a) = f(b)$, với mọi $a, b \in S$. Chứng minh rằng :

a) θ là một tương đẳng trên nửa nhóm S gọi là tương đẳng hạt nhân của đồng cấu f và ký hiệu là $\theta = \mathrm{Ker} f$.

b) Tồn tại một đẳng cấu g từ nửa nhóm thương S/θ lên nửa nhóm T, sao cho đối với đồng cấu chính tắc $\theta^* : S \to S/\theta$ ta có $g\theta^* = f$.

314. Giả sử S là một nửa nhóm tùy ý. Chứng minh rằng :

a) Giao của các tương đẳng trên S cũng là một tương đẳng trên S.

b) Nếu ρ và σ là những tương đẳng trên S sao cho các nửa nhóm thương S/ρ và S/σ có một trong các tính chất giao hoán, lũy đẳng, giản ước được và nếu $\theta = \rho \cap \sigma$ thì S/θ cũng có các tính chất tương ứng.

c) Nếu ρ và σ là hai tương đẳng tùy ý trên nửa nhóm S thì tương đẳng bé nhất trên S chứa ρ và σ là

$$(\rho \cup \sigma)^t = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\rho \cup \sigma)^n.$$

315. Cho S là một nửa nhóm và H là một tập con tùy ý của S. Ta định nghĩa trên S một quan hệ $\mathcal{R}_H$ như sau :

$$\mathcal{R}_H = \{(a, b) \in S \times S \mid ax \in H \text{ khi và chỉ khi } bx \in H \text{ với mọi } x \in S\}.$$

Chứng minh rằng :

a) $\mathcal{R}_H$ là một tương đẳng phải trên S.

b) Nếu S là một nhóm và H là một nhóm con của nó thì $\mathcal{R}_H$ là tập tất cả các cặp (a, b) mà $Ha = Hb$.

c) Nếu ký hiệu :

$W_H = \{x \in S \mid xs \notin H$ với mọi $s \in S\}$, và nếu $W_H \neq \phi$ thì W_H là một lớp tương đương theo tương đẳng $\mathcal{R}_H$, đồng thời W_H là một iđêan phải của nửa nhóm S.

d) Nếu ρ là một tương đẳng phải tùy ý trên nửa nhóm S và H là một lớp tương đương theo tương đẳng phải ρ thì $\rho \in \mathcal{R}_H$.

316. Giả sử S là nửa nhóm nhân tất cả các số nguyên dương và $H = \{h\}$ là tập gồm một số nguyên dương h. Chứng minh rằng :

a) Tương đẳng phải $\mathcal{R}_H$ (xem bài trên) chia S thành một số hữu hạn lớp tương đương. Tìm các lớp đó.

b) W_H (xem câu c) bài trên) gồm tất cả các số nguyên dương không chia hết h.

317. Cho S là một nửa nhóm và H là một tập con tùy ý của nửa nhóm S. Ta định nghĩa trên S một quan hệ $\mathcal{P}_H$ như sau :

$$\mathcal{P}_H = \{(a, b) \in S \times S \mid xay \in H \text{ khi và chỉ khi } xby \in H \text{ với mọi } x, y \in S\}.$$

Chứng minh rằng :

a) $\mathcal{P}_H$ là một tương đẳng trên S.

b) Nếu ký hiệu

$W = \{a \in S \mid xay \notin H$ với mọi $x, y \in S\}$ và nếu $W \neq \phi$ thì W là một lớp tương đương theo tương đẳng $\mathcal{P}_H$ và đồng thời W là một iđêan hai phía của S.

§4. NỬA NHÓM CHÍNH QUY VÀ NỬA NHÓM NGƯỢC

318. Phần tử a thuộc một nửa nhóm S được gọi là *phần tử chính quy* nếu tồn tại một phần tử $x \in S$ sao cho $a x a = a$. Chứng minh rằng :

a) Phần tử $a \in S$ là một phần tử chính quy khi và chỉ khi trong S tồn tại một phần tử lũy đẳng e sao cho

$$aS \cup \{a\} = eS \cup \{e\}.$$

b) Nếu a là một phần tử chính quy thì trong S tồn tại một phần tử b sao cho

$$a b a = a \text{ và } b a b = b.$$

(Phần tử b thỏa mãn điều kiện đó gọi là *phần tử ngược* của a và a, b gọi là *hai phần tử ngược nhau*).

319. Một nửa nhóm S được gọi là một *nửa nhóm chính quy* nếu mỗi phần tử của S đều là phần tử chính quy (xem bài tập trên).

a) Giả sử X và Y là hai tập tùy ý. Trên tích Đềcác $S = X \times Y$ ta định nghĩa một phép toán nhân sau đây: $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1, y_2)$, $(x_1, x_2 \in X, y_1, y_2 \in Y)$. Chứng tỏ rằng với phép toán đó S lập thành một nửa nhóm chính quy.

b) Trong nửa nhóm S ở câu a) hai phần tử bất kỳ đều ngược nhau.

320. Nửa nhóm S được gọi là một *nửa nhóm ngược*, nếu mỗi phần tử a thuộc S có một phần tử ngược duy nhất b thuộc S, mà ta ký hiệu là $b = a^{-1}$. Chứng minh rằng:

a) Một nửa nhóm chính quy S là một nửa nhóm ngược khi và chỉ khi hai phần tử lũy đẳng tùy ý của S giao hoán với nhau.

b) Trong một nửa nhóm ngược S ta có các đồng nhất thức sau:

$$(x^{-1})^{-1} = x, \qquad (1)$$

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}, \qquad (2)$$

$$xx^{-1}\, yy^{-1} = yy^{-1}\, xx^{-1}, \qquad (3)$$

với mọi $x, y \in S$.

c) Một nửa nhóm chính quy S là một nửa nhóm ngược khi và chỉ khi S thỏa mãn các đồng nhất thức (1), (2), (3) trong câu b).

321. Cho một tập X tùy ý. Ta định nghĩa một *phép thế bộ phận* của tập X là một song ánh $\varphi : A \to B = \varphi(A)$, trong đó A và B là các tập con của X. Ta ký hiệu $\varphi^{-1} : B \to A$ là ánh xạ ngược của φ. Giả sử $\mathcal{J}_X$ là tập tất cả các phép thế bộ phận của tập X, kể cả phép thế rỗng từ tập rỗng ϕ lên chính nó mà ta ký hiệu là 0.

Ta định nghĩa phép nhân hai phần tử thuộc $\mathcal{I}_X$ như sau: Nếu $\varphi: A \to B$, $\psi: C \to D$, A, B, C, D là các tập con của X và nếu $B \cap C = \phi$ thì ta đặt $\psi\varphi = 0$, còn nếu $B \cap C \neq \phi$ và giả sử $U = \varphi^{-1}(B \cap C)$ thì ta định nghĩa $\psi\varphi$ là cái hợp thành của hai ánh xạ thu hẹp $\varphi | U$ và $\psi | \varphi(U)$. Chứng minh rằng:

a) Nếu $\varphi, \psi \in \mathcal{I}_X$ thì $\psi\varphi \in \mathcal{I}_X$.

b) Với phép nhân đó, $\mathcal{I}_X$ lập thành một nửa nhóm ngược, gọi là *nửa nhóm ngược đối xứng* trên tập X.

c) Mọi nửa nhóm ngược S đẳng cấu với một nửa nhóm con của nửa nhóm ngược đối xứng trên tập S.

322. Cho S là một nửa nhóm ngược. Ta định nghĩa một quan hệ trên S bằng cách coi $a \leqslant b$ khi và chỉ khi $ab^{-1} = aa^{-1}$. Chứng minh rằng:

a) Với các phần tử $a, b \in S$, $a \leqslant b$ khi và chỉ khi thỏa mãn một trong các đẳng thức tương đương sau:

(1) $ab^{-1} = aa^{-1}$, (1') $ba^{-1} = aa^{-1}$;

(2) $a^{-1}b = a^{-1}a$, (2') $b^{-1}a = a^{-1}a$;

(3) $ab^{-1}a = a$, (3') $a^{-1}ba^{-1} = a^{-1}$.

b) Quan hệ $\leqslant$ là một quan hệ thứ tự trên nửa nhóm ngược S.

c) Nếu $a \leqslant b$ thì $a^{-1} \leqslant b^{-1}$ và với mọi $x \in S$ ta có

$$xa \leqslant xb \text{ và } ax \leqslant bx.$$

323. Giả sử S là một nửa nhóm ngược, S' là một nửa nhóm nào đó và giả sử $\varphi : S \to S'$ là một đồng cấu từ nửa nhóm S lên nửa nhóm S'. Chứng minh rằng:

a) Nếu e' là một phần tử lũy đẳng của S' thì tạo ảnh toàn phần của e' qua đồng cấu φ là một nửa nhóm con ngược của nửa nhóm S.

b) S' là một nửa nhóm ngược.

c) Với mọi $a \in S$, $\varphi(a^{-1}) = [\varphi(a)]^{-1}$.

324. Giả sử I là một iđêan của nửa nhóm S, ρ là tương đẳng Rixơ của S theo môđun I (xem bài 312). Chứng minh rằng S là một nửa nhóm ngược khi và chỉ khi I và nửa nhóm thương S/ρ là những nửa nhóm ngược.

325. Giả sử S là một nửa nhóm ngược và E là tập tất cả các lũy đẳng của S. Ta định nghĩa một quan hệ α trên S như sau :

$$\alpha = \{(x, y) \in S \times S \mid x^{-1} ex = y^{-1} ey \text{ với mọi } e \in E\}$$

Chứng minh rằng :

a) α là một tương đẳng trên nửa nhóm S.

b) Mỗi lớp tương đương của S theo quan hệ α chứa không quá một lũy đẳng của S.

c) Nếu σ là một tương đẳng tùy ý trên nửa nhóm S sao cho mỗi lớp tương đương theo quan hệ σ chứa không quá một lũy đẳng của S thì $\sigma \subset \alpha$.

326. Giả sử S là một nửa nhóm ngược, α là một tương đẳng trên nửa nhóm S và $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ là tập tất cả các lũy đẳng của nửa nhóm thương S/α. Chứng minh rằng :

a) Mỗi A_i, $i \in I$, là một nửa nhóm con ngược của nửa nhóm S.

b) $A_i \cap A_j = \phi$ với $i \neq j$.

c) Mỗi lũy đẳng của nửa nhóm S được chứa trong một A_i nào đó của $\mathcal{A}$.

d) Với mọi $a \in S$ và $i \in I$, tồn tại $j \in I$ sao cho $a^{-1} A_i a \subset A_j$.

e) Nếu a, ab, $bb^{-1} \in A_i$ thì $b \in A_i$.

327. Giả sử S là một nửa nhóm chính quy. Trên S ta định nghĩa các quan hệ tương đương sau đây :

$$\mathcal{L} = \{(a, b) \in S \times S \mid Sa = Sb\},$$
$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in S \times S \mid aS = bS\}.$$

Chứng minh rằng :

a) $\mathcal{L}\mathcal{R} = \mathcal{R}\mathcal{L}$, do đó quan hệ $\mathcal{D} = \mathcal{L}\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương bé nhất trên S chứa $\mathcal{L}$ và $\mathcal{R}$.

b) Nếu với mỗi $a \in S$ ta ký hiệu D_a là lớp tương đương theo quan hệ $\mathcal{D}$ chứa a thì mỗi phần tử ngược của a nằm trong D_a

328. Cho V là một không gian vectơ n chiều trên một trường P. Ký hiệu $F = \mathrm{Hom}\,(V)$ là nửa nhóm nhân tất cả các phép biến đổi tuyến tính của không gian V. Trên nửa nhóm F ta xác định các quan hệ $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{D}$ như trong bài tập trên.

Chứng minh rằng với mọi φ, $\psi \in F$:

a) $(\varphi, \psi) \in \mathcal{L}$ khi và chỉ khi $\mathrm{Ker}\varphi = \mathrm{Ker}\psi$;

b) $(\varphi, \psi) \in \mathcal{R}$ khi và chỉ khi $\varphi(V) = \psi(V)$;

c) $(\varphi, \psi) \in \mathcal{D}$ khi và chỉ khi $\mathrm{rank}\varphi = \mathrm{rank}\psi$.

CHƯƠNG VII

NHÓM

Một tập G được gọi là một *nhóm* nếu trên G đã xác định một phép toán đại số hai ngôi (toàn phần) có tính chất kết hợp và khả nghịch hai phía (hoặc G là một vị nhóm và mọi phần tử đều có nghịch đảo hai phía). Nếu phép toán có tính chất giao hoán thì G gọi là nhóm *Aben*. Số phần tử của nhóm (nếu nhóm hữu hạn) được gọi là *cấp* của nhóm. Nếu nhóm vô hạn, ta cũng nói rằng nó có cấp vô hạn.

Một tập con H của G được gọi là *nhóm con* của G nếu H lập thành một nhóm đối với cùng phép toán xác định trong G. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi với mọi $a, b \in H$ đều có $ab^{-1} \in H$. Giả sử M là một tập con của nhóm G. Giao của tất cả các nhóm con của G chứa M, tức là nhóm con bé nhất của G chứa tập con M được gọi là nhóm con *sinh bởi* tập M và được ký hiệu là $\langle M \rangle_g$; M được gọi là *tập sinh* của nhóm con ấy. Trường hợp M chỉ gồm một phần tử a, thì $\langle a \rangle_g$ được gọi là nhóm con xiclic, và nếu $G = \langle a \rangle_g$ thì G được gọi là *nhóm xiclic* sinh bởi phần tử a.

Một phần tử $x \in G$ được gọi là có *cấp hữu hạn n* nếu n là số tự nhiên bé nhất sao cho $x^n = e$, trong đó e là đơn vị của nhóm. Nếu mọi phần tử của nhóm đều có cấp hữu hạn thì G được gọi là nhóm *tuần hoàn*. Tập hợp tất cả các phần tử của G giao hoán với mọi phần tử của nhóm lập thành một nhóm con gọi là *tâm* của nhóm G là ký hiệu là $C(G)$

Giả sử H là nhóm con của một nhóm G đã cho và x là một phần tử tùy ý của G. Tập con xH gồm tất cả các phần tử dạng xh, $h \in H$, được gọi là *lớp ghép bên phải* của G theo H và x được gọi là phần tử *đại diện* của lớp đó. Ta có thể biểu diễn G thành hợp của các lớp ghép bên phải đôi một không giao nhau của G theo H và ta nói đã *phân tích bên phải* nhóm G theo H (xem bài tập). Tương tự đối với các khái niệm lớp ghép bên trái, là sự phân tích bên trái.

Nếu H là một nhóm con của G sao cho sự phân tích bên trái và bên phải của G theo H trùng nhau, tức $xH = Hx$ với mọi $x \in G$, thì H được gọi là một *ước chuẩn* hoặc một *nhóm con bất biến* của G và ký hiệu là $H \triangleright G$. Nhóm con H là ước chuẩn của G khi và chỉ khi $x^{-1}Hx = H$ với mọi $x \in G$ hay H chứa cùng với phần tử h mọi phần tử liên hợp với h.

Giả sử H là ước chuẩn của G. Ta ký hiệu G/H là tập tất cả các lớp ghép (bên trái cũng như bên phải) của G theo H. Ta định nghĩa phép nhân các lớp theo quy tắc $xH \cdot yH = xyH$ thì G/H sẽ lập thành một nhóm (bài tập) gọi là *nhóm thương* của G theo H.

Một hệ hữu hạn các nhóm con lồng vào nhau của nhóm G:

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_k = E \qquad (1)$$

được gọi là một *dãy chuẩn tắc* của nhóm G nếu mỗi G_i đều là ước chuẩn thực sự của $G_{i-1}(i = 1, 2, \ldots, k)$. Các nhóm thương

$$G/G_1, G_1/G_2, \ldots, G_{k-1}/E.$$

được gọi là các *thương* của dãy chuẩn tắc (1). Số các thương ấy, tức là số k, được gọi là *độ dài* của dãy (1)

Dãy chuẩn tắc

$$G \supset F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_l = E$$

được gọi là cái *mịn hóa* của dãy chuẩn tắc (1) nếu mọi nhóm con G_i trong (1) đều trùng với một trong các nhóm con F_j, tức là nếu tất cả các nhóm con có mặt trong (1) đều có mặt trong (2). Một dãy chuẩn tắc không có cái mịn hóa nào khác chính nó (không lặp lại) được gọi là *dãy hợp thành*. Từ đó định nghĩa các thương hợp thành và độ dài hợp thành tương tự như trên.

Một nhóm con H của nhóm G được gọi là *nhóm con á chuẩn* nếu nó được chứa trong một dãy chuẩn tắc nào đó của nhóm đó. Nói khác đi, tất cả các ước chuẩn của G và tất cả các ước chuẩn của chúng (chưa hẳn là ước chuẩn của G) đều là nhóm con á chuẩn.

Một chuỗi giảm các nhóm con của nhóm G:

$$G = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_n \supset \ldots$$

được gọi là *chuỗi chuẩn tắc giảm* của G nếu $H_n \triangleleft H_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$ Nếu chuỗi đó hữu hạn thì ta bảo nó bị *ngắt đoạn*. Tương tự chuỗi tăng các nhóm con của G:

$$E = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots$$

được gọi là *chuỗi chuẩn tắc tăng* của G nếu $F_n \triangleleft F_{n-1}$, $n = 0, 1, \ldots$ Nếu chuỗi hữu hạn thì gọi là ngắt đoạn. Hai dãy chuẩn tắc gọi là *đẳng cấu* nhau nếu chúng có độ dài bằng nhau và có thể sắp đặt sao cho các thương tương ứng đẳng cấu với nhau.

Giả sử G và G' là các nhóm (phỏng nhóm, nửa nhóm) đã cho. Ánh xạ f từ G vào G' được gọi là một *đồng cấu* nếu nó bảo tồn các phép toán trong G và G', tức là $f(xy) = f(x) f(y)$ với mọi $x, y \in G$. Nếu ánh xạ f là đơn ánh, toàn ánh, song ánh và là đồng cấu thì f sẽ được gọi là *đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu* tương ứng. Trường hợp $G' \subseteq G$ thì đồng cấu f được gọi là *tự đồng cấu*. Nếu f là ánh xạ đẳng cấu thì G lên chính nó (trường hợp $G' = G$) thì nó được gọi là một *tự đẳng cấu*.

Giả sử G là một nhóm và H là một ước chuẩn của G. Đồng cấu φ_0 từ G lên G/H xác định bởi $\varphi_0 : x \mapsto xH$ được gọi là *đồng cấu tự nhiên*.

Giả sử f là một đồng cấu từ nhóm G vào G'. Tạo ảnh toàn phần của phần tử đơn vị e' của G' được gọi là *hạt nhân* của f, và được ký hiệu là Ker $f = f^{-1}(e')$. Ta cũng dùng ký hiệu Imf để chỉ ảnh $f(G)$ của nhóm G.

Nếu f là một đồng cấu từ G vào G' thì Ker$f$ là một ước chuẩn của G và Imf đẳng cấu với nhóm thương $G/$Ker$f$ (*định lý đồng cấu nhóm*).

Nhóm G được gọi là nhóm Aben nếu $ab = ba$ với mọi $a, b \in G$. Nhóm G được gọi là *nhóm giải được* nếu G có

một dãy chuẩn tắc giải được hữu hạn, tức là dãy chuẩn tắc hữu hạn mà tất cả các thương của nó đều Aben.

Giả sử trong nhóm G đã cho một dãy bất biến

$$E = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_i \subset \dots \subset A_n = G \quad (1)$$

Dãy đó được gọi là *dãy tâm* nếu với $i = 0, 1, \dots, n-1$, nhóm thương A_{i+1}/A_i nằm trong tâm của nhóm thương G/A_i, nói khác đi nếu

$$[A_{i+1}, G] \subseteq A_i,\ i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2)$$

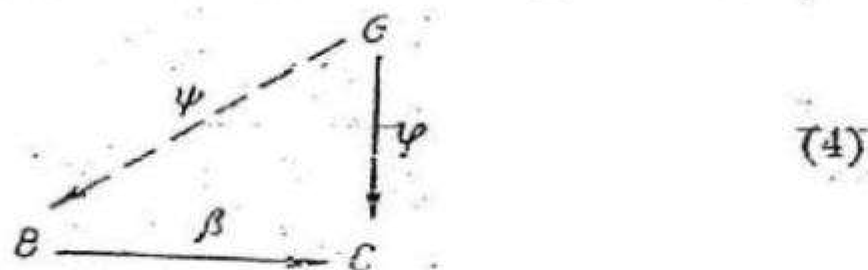
Nhóm G được gọi là nhóm *lũy linh* nếu nó có một dãy tâm. Nhóm G được gọi là nhóm *chia được* nếu $nG = G$, $n \in \mathbb{N}$, tức là nếu phương trình $x^n = a$; $a \in G$, $n \in \mathbb{N}$, luôn luôn có nghiệm trong G. Nhóm G được gọi là nhóm *nội xạ* nếu mọi đồng cấu từ A vào G đều có thể mở rộng thành đồng cấu từ B vào G đối với mọi nhóm con A của nhóm B đã cho bất kỳ.

Giả sử S là một tập tùy ý cho trước. Ta gọi là nhóm *tự do trên tập S*, một nhóm F cùng với ánh xạ $f : S \to F$ sao cho với mọi ánh xạ $g : S \to X$ từ tập S vào một nhóm X, tồn tại một đồng cấu duy nhất $h : F \to X$ sao cho biểu đồ sau giao hoán

S —f→ F
g: S → X, h: F → X
(3)

Giả sử S là một tập hợp tùy ý cho trước. Ta gọi *nhóm Aben tự do trên tập S*, một nhóm Aben F cùng với một ánh xạ $f : S \to F$ sao cho với mọi ánh xạ $g : S \to X$ từ tập S vào một nhóm Aben X bất kỳ, tồn tại một đồng cấu duy nhất $h : F \to X$ sao cho biểu đồ (3) giao hoán.

Nhóm G được gọi là nhóm *xạ ảnh* nếu mỗi biểu đồ



trong đó β là toàn cấu, φ là đồng cấu, đều được bổ sung bởi đồng cấu $\psi : G \to B$ để thành biểu đồ giao hoán.

Nhóm G được gọi là một p — *nhóm* nếu mọi phần tử của G đều có cấp là lũy thừa của số nguyên tố p. Ta cũng gọi các p-nhóm con tối đại của các nhóm hữu hạn là các p-nhóm con Xilôp.

Ta nói rằng *nhóm G tác dụng trên tập M* nếu với mỗi cặp phần tử $m \in M$, $g \in G$ đã xác định một phần tử $mg \in M$ sao cho $(mg_1)g_2 = m(g_1g_2)$ và $me = m$ với mọi $m \in M$, $g_1, g_2 \in G$, e là đơn vị của nhóm G. Tập $mG = \{mg \mid g \in G\}$ được gọi là *quỹ đạo* của phần tử m. Rõ ràng quỹ đạo của hai phần tử bất kỳ của M hoặc trùng nhau hoặc không giao nhau, như thế tập M phân tích thành các quỹ đạo không giao nhau.

§1. NHÓM. NHÓM CON

329. Xét xem các tập sau đây đối với các phép toán xác định trên chúng có lập thành nhóm không? Nhóm nào là nhóm con của nhóm nào? Tìm cấp của mỗi nhóm nếu nó hữu hạn.

1) Tập số nguyên đối với phép cộng.

2) Tập số chẵn đối với phép cộng.

3) Tập các số nguyên bội của một số tự nhiên n, đối với phép cộng.

4) Tập số không đối với phép cộng.

5) Tập số 1 đối với phép nhân.

6) Tập $M = \{1, -1\}$ đối với phép nhân.

7) Tập các lũy thừa của một số $a \neq 0$ với số mũ tự nhiên, đối với phép nhân.

8) Tập các số phức có môđun bằng 1 đối với phép nhân.

9) Tập số hữu tỷ đối với phép cộng.

10) Tập số hữu tỷ đối với phép nhân.

11) Tập số hữu tỷ khác không đối với phép nhân.

12) Tập số hữu tỷ dương đối với phép nhân.

13) Tập số tự nhiên đối với phép cộng.

14) Tập số hữu tỷ khác không đối với phép chia thông thường.

15) Tập số nguyên đối với phép trừ.

16) Tập các căn bậc n (thực hoặc phức) của đơn vị, đối với phép nhân.

17) Tập các lũy thừa bậc k của các căn bậc p của đơn vị đối với phép nhân (p là một số nguyên tố nào đó).

18) Tập các số thực dương đối với phép toán $a * b = a^b$.

19) Tập các số thực dương đối với phép toán $a * b = a^2b^2$.

20) Tập các phép thế của n phần tử đối với phép nhân.

21) Tập các phép thế chẵn của n phần tử đối với phép nhân.

22) Tập các phép thế lẻ của n phần tử đối với phép nhân.

23) Tập các đa thức thực một ẩn bậc không quá n (gồm cả bậc 0) đối với phép cộng.

24) Tập các đa thức thực một ẩn bậc n đối với phép cộng.

25) Tập các đa thức thực bậc bất kỳ (kể cả bậc 0) một ẩn, đối với phép cộng.

26) Tập các vectơ của không gian ba chiều thông thường đối với phép cộng.

27) Tập các vectơ của không gian $\mathbf{R}^n$ với phép cộng.

28) Tập các ma trận thực cấp n đối với phép nhân.

29) Tập các ma trận thực không suy biến cấp n đối với phép nhân.

30) Tập các ma trận cấp n với phần tử nguyên, đối với phép nhân.

31) Tập các ma trận cấp n với phần tử nguyên và định thức bằng 1, đối với phép nhân.

32) Tập các ma trận cấp n với phần tử nguyên và định thức bằng $\pm$ 1, đối với phép nhân.

33) Tập các ma trận chéo phức không suy biến, đối với phép nhân.

34) Tập các ma trận phức cấp n dạng tam giác đối với phép nhân với tích các phần tử trên đường chéo chính khác không.

35) Tập các ma trận phức dạng

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \dots 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 \end{bmatrix}$$

với $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \neq 0$ đối với phép nhân!

36) Tập các ma trận phức dạng

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \dots a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots 0 \end{bmatrix}$$

đối với phép nhân.

37) Tập các phép dời hình của không gian 3 chiều nếu ta gọi tích của hai phép dời hình s và t là phép dời hình st thu được bằng cách thực hiện các phép dời s và t.

38) Tập các song ánh từ một tập M lên chính nó đối với phép lấy tích các ánh xạ.

39) Tập các phép quay quanh tâm của mỗi khối đa diện đều biến mỗi khối thành chính nó (các phép tự trùng), nếu ta định nghĩa tích hai phép quay là sự thực hiện liên tiếp hai phép quay ấy. Tìm cấp của mỗi nhóm trong 5 nhóm ấy.

40) Tập Hom (X, X) tất cả các ánh xạ từ X vào X đối với phép nhân ánh xạ.

330. a) Cho X là một nhóm với đơn vị là e. Chứng minh rằng nếu ta có $a^2 = e$ với mọi $a \in X$ thì X là nhóm Aben.

b) Chứng minh rằng tâm $C(X)$ của một nhóm X là một nhóm con giao hoán của X và mọi nhóm con của $C(X)$ đều là ước chuẩn của X.

331. a) Chứng minh rằng mọi nửa nhóm khác rỗng hữu hạn X là một nhóm khi và chỉ khi luật giản ước thực hiện được với mọi phần tử của X.

b) Chứng minh rằng mọi bộ phận khác rỗng ổn định của một nhóm hữu hạn X là một nhóm con của X.

c) Cho X là một tập khác rỗng cùng với một phép toán hai ngôi kết hợp trong X; a là một phần tử tùy ý của X. Ký hiệu

$$aX = \{ax \mid x \in X\}, \quad Xa = \{xa \mid x \in X\}.$$

Chứng minh rằng X là một nhóm khi và chỉ khi ta có

$$aX = Xa = X \text{ với mọi } a \in X.$$

332. a) Chứng minh rằng trong nhóm cộng các số nguyên **Z**, một bộ phận A của **Z** là một nhóm con của **Z** nếu và chỉ nếu A có dạng $m\mathbf{Z}$, $m \in N \cup 0$

b) Chứng minh rằng mọi nhóm con của nhóm xiclic đều là nhóm xiclic.

333. a) Tìm tất cả các phần tử sinh của nhóm cộng các số nguyên.

b) Tìm tất cả các phần tử sinh của một nhóm xiclic hữu hạn. Tìm số phần tử sinh của một nhóm xiclic cấp n.

334. Trong nhóm nhân các số phức khác không, tìm các nhóm con sinh bởi các phần tử sau :

a) $\langle i \rangle_g$;

b) $\left\langle -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right\rangle_g$;

c) $\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right\rangle_g$;

d) $\left\langle -\frac{1}{2} i \right\rangle_g$;

e) $\langle 2, -5 \rangle_g$;

f) Giao của mỗi nhóm con nói trên với nhóm con gồm tất cả các số thực khác không.

335. a) Chứng minh rằng nếu a là một phần tử cấp n thì $a^k = 1$ khi và chỉ khi k chia hết cho n.

b) Chứng minh rằng với hai phần tử a, b bất kỳ của nhóm G, tích ab và ba có cùng một cấp.

d) Chứng minh rằng với ba phần tử a, b, c bất kỳ của nhóm G, các tích abc, bca, cab có cùng cấp.

d) Chứng minh rằng trong một nhóm Aben, tích của phần tử a có cấp m với phần tử b có cấp n là một phần tử có cấp mn nếu m và n nguyên tố cùng nhau.

336. Tìm tất cả các nhóm con của

a) nhóm xiclic cấp 6;

b) nhóm xiclic cấp 24.

337. a) Chứng minh rằng nhóm đối xứng bậc n, với $n > 1$, được sinh bởi tập tất cả các phép chuyển trí (i, j), $i, j = 1, 2, ..., n$.

b) Chứng minh rằng nhóm đối xứng bậc n, $n > 1$, được sinh bởi các phép chuyển trí $(1\ 2)$, $(1\ 3)$, ..., $(1\ n)$.

c) Chứng minh rằng trong nhóm đối xứng bậc n, $n \geqslant 3$, tất cả các chu trình ba số sinh ra nhóm thay phiên (tức là nhóm con gồm các phép thế chẵn bậc n).

d) Chứng minh rằng nhóm thay phiên bậc n, $n \geqslant 3$, được sinh bởi các chu trình ba số (123), (124), ..., $(12n)$.

338. Giả sử G là một nhóm xiclic vô hạn sinh bởi phần tử x. Với số nguyên không âm m, ký hiệu H_m là tập các phần tử dạng x^{km} $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$. Chứng minh rằng:

a) H_m là nhóm con của nhóm G.

b) Nếu $m_1 \neq m_2$ thì $H_{m_1} \neq H_{m_2}$.

c) G không có nhóm con nào khác ngoài các nhóm con H_m.

339. Giả sử G là một nhóm xiclic hữu hạn cấp n sinh bởi phần tử x. Với mỗi số tự nhiên d là ước của n, ký hiệu H_d là tập các phần tử x^d, x^{2d}, ..., $x^{(n/d)d} = x^n$. Chứng minh rằng:

a) H_d là nhóm con của nhóm G.

b) Nếu $d_1 \neq d_2$ thì $H_{d_1} \neq H_{d_2}$.

c) G không có nhóm con nào khác ngoài các nhóm con H_d với tất cả các ước d của số n.

340. a) Chứng minh rằng tính chất « là nhóm con » có tính bắc cầu.

b) Chứng minh rằng mọi nhóm vô hạn đều có vô số nhóm con.

c) Chỉ rõ những nhóm nào

— chỉ có một nhóm con.

— chỉ có hai nhóm con.

— chỉ có ba nhóm con.

§2. ƯỚC CHUẨN. NHÓM THƯƠNG

341. a) Chứng minh rằng nếu phần tử $y \in G$ được chứa trong một lớp ghép bên phải xH của nhóm G theo nhóm con H thì $yH = xH$. Tương tự đối với các lớp ghép trái.

b) Giả sử H là một nhóm con của G và $x, y \in G$. Chứng minh rằng các lớp ghép bên phải xH, yH hoặc trùng nhau, hoặc không có phần tử chung nào. Tương tự đối với các lớp ghép trái.

c) Chứng minh rằng nếu $x \in G$ là một phần tử tùy ý và H là một nhóm con của G, thì x được chứa trong một lớp ghép phải và một lớp ghép trái của G theo H.

d) Chứng minh rằng với một nhóm con H bất kỳ của nhóm G, luôn luôn tồn tại sự phân tích bên phải và bên trái của G theo H.

e) Chứng minh rằng nếu G là một nhóm cấp n, H là một nhóm con cấp k thì ta có $n = kj$, trong đó j là số lớp ghép trong sự phân tích (bên phải hoặc trái) của G theo H.

f) Chứng minh rằng trong một nhóm hữu hạn, cấp của mọi phần tử của nó đều là ước của cấp của nhóm.

g) Phân tích một nhóm G tùy ý theo nhóm con đơn vị và theo chính G, ta sẽ được gì?

342. a) Tìm sự phân tích bên phải của nhóm đối xứng S_3 theo nhóm con gồm hai phần tử e và (12).

b) Tìm sự phân tích bên trái của nhóm thay phiên A_4 theo nhóm con gồm ba phần tử e, (123), (132).

343. a) Tìm các sự phân tích của nhóm xiclic cấp 10 theo tất cả các nhóm con của nó.

b) Tìm sự phân tích của nhóm xiclic vô hạn sinh bởi phần tử x theo nhóm con sinh bởi phần tử x^3.

344. Trong nhóm đối xứng S_5, tập nào trong các tập sau là lớp ghép theo một nhóm con nào đó :

a) $K_1 = \{(234), (1234)\}$?

b) $K_2 = \{(12), (123), (1234\}$?

c) $K_3 = \{e, (1234), (13)(24), (1432)\}$?

d) $K_4 = \{(12), (13), (14), (15)\}$?

e) $K_5 = \{(12), (152)(34)\}$?

345. Tìm tất cả các nhóm con của nhóm đối xứng bậc 3.

Nhóm nào trong các nhóm đó là ước chuẩn ?

346. a) Chứng minh rằng giao của hai ước chuẩn của một nhóm G cũng là một ước chuẩn của G.

b) Chứng minh rằng tích của hai ước chuẩn của nhóm G cũng là một ước chuẩn của G.

347. a) Cho hai phép thế s và t đã phân tích thành các chu trình độc lập. Chứng minh rằng phép thế $t^{-1}st$ có thể tìm được bằng cách áp dụng phép thế t vào các số của phép thế s.

Áp dụng với $s = (123)(45)$,

$$t = (51)(324).$$

b) Từ đó chứng minh rằng nhóm con

$$K = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)$$

là một ước chuẩn Aben của nhóm đối xứng S_4.

Nhóm này được gọi là *nhóm Klein*.

348. a) Chứng minh rằng nhóm thay phiên bậc n là ước chuẩn của nhóm đối xứng bậc n.

b) Chứng minh rằng một ước chuẩn bất kỳ của nhóm thay phiên A_n với $n \geqslant 3$, chứa ít nhất một chu trình 3 số thì trùng với A_n.

349. Giả sử G là tập tất cả các bộ ba số nguyên dạng $(k_1, k_2, 1)$ và $(k_1, k_2, -1)$. Trong G, phép toán được xác định theo quy tắc

$$(k_1, k_2, 1)(l_1, l_2, \varepsilon) = (k_1 + l_1, k_2 + l_2, \varepsilon),$$

$$(k_1, k_2, -1)(l_1, l_2, \varepsilon) = (k_1 + l_2, k_2 + l_1, -\varepsilon)$$

với $\varepsilon = \pm 1$.

a) Chứng minh rằng G là một nhóm.

b) Chứng minh rằng nhóm con H_1 sinh bởi $(1, 0, 1)$ và $(0, 1, 1)$ là ước chuẩn của G.

c) Chứng minh rằng nhóm con H_2 sinh bởi $(1, 0, 1)$ là ước chuẩn của H_1.

d) H_2 có phải là ước chuẩn của H_1 không?

350. Giả sử $G = \mathbf{Z}^3$ với phép nhân trên G xác định như sau:

$$(k_1, k_2, k_3)(l_1, l_2, l_3) = (k_1 + (-1)^{k_3} l_1, k_2 + l_2, k_3 + l_3).$$

a) Chứng tỏ rằng G là một nhóm.

b) Nhóm con H sinh bởi phần tử $(1, 0, 0)$ có phải là ước chuẩn của G không?

351. Ký hiệu $GL(n, \mathbf{K})$ là tập các ma trận phức cấp n không suy biến, $SL(n, \mathbf{K})$ là tập các ma trận phức cấp n có định thức bằng 1, $D(n, \mathbf{K})$ là tập các ma trận chéo phức cấp n, $T(n, \mathbf{K})$ là tập các ma trận phức cấp n dạng tam giác với phía dưới đường chéo chính bằng không, $UT(n, \mathbf{K})$ là tập con của $T(n, \mathbf{K})$ với các phần tử thuộc đường chéo chính bằng 1, $UT^m(n, K)$ là tập con của $UT(n, \mathbf{K})$ với $m - 1$ đường chéo bằng không ở phía trên đường chéo chính. Chứng minh rằng:

a) Các tập trên đều là nhóm đối với phép nhân ma trận.

b) $SL(n, K)$ là ước chuẩn của $GL(n, K)$.

c) $UT(n, K)$ là ước chuẩn của $T(n, K)$.

d) $UT^m(n, K)$ là ước chuẩn của $T(n, K)$ với $m = 1, 2, ...$

352. a) Giả sử H là một ước chuẩn của nhóm G. Ký hiệu G/H là tập các lớp ghép của G theo H. Đặt tương ứng cặp lớp ghép (xH, yH) với lớp ghép $xy H$, hãy chứng minh rằng ta thu được một phép toán đại số hai ngôi trên G/H.

b) Chứng minh rằng tập các lớp ghép G/H lập thành một nhóm đối với phép toán xác định trên. Nhóm này gọi là nhóm thương của G theo ước chuẩn H.

c) Các nhóm thương G/G, G/E là những nhóm nào? (E là nhóm con đơn vị).

d) Giả sử cấp của nhóm G là n, cấp của H là k. Tìm cấp của nhóm thương G/H.

e) Tìm nhóm thương của nhóm cộng $\mathbf{Z}$ trên nhóm con các số nguyên là bội của 15.

f) Mô tả tất cả các nhóm thương của nhóm cộng các số nguyên $\mathbf{Z}$ theo các ước chuẩn của nó.

g) Tìm nhóm thương của nhóm cộng các số nguyên là bội của 4 trên nhóm con các số nguyên là bội của 24.

h) Tìm nhóm thương của nhóm nhân các số thực khác không trên nhóm con các số thực dương.

353. Giả sử G là một nhóm, x và y là hai phần tử của G. Ta gọi phần tử $xyx^{-1}y^{-1}$ là *hoán tử* của x và y.

a) Chứng minh rằng nhóm con A sinh bởi tập tất cả các hoán tử của tất cả các cặp x, y của G là một ước chuẩn của G và nhóm thương G/A là Aben. Nhóm con A được gọi là *đạo nhóm* của G và thường ký hiệu là G' hoặc $[G, G]$.

b) Chứng minh rằng muốn cho một nhóm thương G/H của nhóm G là Aben, điều kiện ắt có và đủ là ước chuẩn H chứa đạo nhóm G'.

c) Tìm đạo nhóm của S_3 và của A_3.

d) Chứng tỏ rằng đạo nhóm của nhóm thay phiên A_4 là nhóm Klein ; tức là

$$[A_4, A_4] = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

e) Chứng minh rằng :

$[S_n, S_n] = A_n$ với mọi n tự nhiên.

f) Chứng minh rằng

$[A_n, A_n] = A_n$ với $n \geqslant 5$.

354. Chứng minh rằng :

a) Trong mọi nhóm đều có thể tìm được một dãy chuẩn tắc đi qua một ước chuẩn cho trước của nhóm đã cho.

b) Hai dãy chuẩn tắc của một nhóm tùy ý đều có các mịn hóa đẳng cấu (*định lý Soraye*).

c) Nếu nhóm G có dãy hợp thành, thì hai dãy hợp thành bất kỳ của nhóm đó đều đẳng cấu với nhau (*định lý Joocđăng — Hônđe*).

d) Nếu một nhóm G có dãy hợp thành, thì mỗi dãy chuẩn tắc của nhóm đó đều được chứa trong một dãy hợp thành nào đó và vì thế đều có độ dài không vượt quá độ dài của các dãy hợp thành của G.

355. Chứng minh rằng :

a) Nhóm G có dãy hợp thành khi và chỉ khi tất cả các chuỗi chuẩn tắc tăng và chuỗi chuẩn tắc giảm của nó đều ngắt đoạn.

b) Trong mọi nhóm con á chuẩn H của nhóm G đều có thể tìm được ít nhất một ước chuẩn thực sự tối đại của nhóm con đó.

356. Chứng minh rằng :

a) Mọi nhóm con á chuẩn H của nhóm G với dãy hợp thành đều có dãy hợp thành.

b) Nếu H là một nhóm con á chuẩn thực sự của nhóm G thì độ dài hợp thành của nhóm H bé hơn độ dài hợp

thành của nhóm G, còn các thương hợp thành của nhóm H lập thành bộ phận của hệ các thương hợp thành của chính nhóm G.

c) Mọi nhóm thương G/H của nhóm G với dãy hợp thành cũng có dãy hợp thành; độ dài hợp thành của nó bằng hiệu của các độ dài hợp thành của G và của H, còn các thương hợp thành của nhóm H tạo thành một hệ thương hợp thành của nhóm G.

d) Tìm một ví dụ chứng tỏ rằng một nhóm với dãy hợp thành có thể chứa những nhóm con không có dãy hợp thành.

§3. ĐỒNG CẤU. ĐẲNG CẤU

357. Ký hiệu M là nửa nhóm nhân các ma trận phức cấp $n > 1$. K là nửa nhóm nhân các số phức. Các ánh xạ f_1, f_2, f_3 từ M vào K được xác định bởi

a) $f_1(a) = \det a$,

b) $f_2(a) = a_{11}$;

c) $f_3(a) = 1$.

trong đó $\det a$ là định thức của ma trận a, a_{11} là phần tử ở hàng một cột một của ma trận a. Chỉ rõ ánh xạ nào là đồng cấu?

358. a) Tìm tất cả các tự đồng cấu của nửa nhóm nhân tất cả các số nguyên dạng 3^n $(n = 1, 2, 3, ...)$.

b) Trong số đó, ánh xạ nào là tự đẳng cấu?

359. a) Giả sử f là một đồng cấu từ phỏng nhóm nhân M_1 lên phỏng nhóm nhân M_2. Giả sử M_1 có một số trong các tính chất: kết hợp, giao hoán, khả nghịch bên trái, khả nghịch bên phải, có đơn vị trái, có đơn vị phải. Thế thì M_2 có các tính chất tương ứng không?

b) Tìm một ví dụ để chứng tỏ rằng nếu nửa nhóm M_1 thỏa mãn luật giản ước và f là một đồng cấu từ M_1 lên nửa nhóm M_2 thì M_2 có thể không thỏa mãn luật giản ước.

360. a) Chứng minh rằng mọi nửa nhóm xiclic vô hạn đều đẳng cấu với nhau.

b) Tìm điều kiện ắt có và đủ để hai nửa nhóm xiclic hữu hạn đẳng cấu với nhau.

361. a) Chứng minh rằng mọi nhóm xiclic vô hạn đều đẳng cấu với nhau.

b) Tìm điều kiện ắt có và đủ để hai nhóm xiclic hữu hạn đẳng cấu với nhau.

362. a) Chứng minh rằng nhóm cộng các số thực đẳng cấu với nhóm nhân các số thực dương.

b) Chứng minh rằng nhóm cộng các số hữu tỷ không đẳng cấu với nhóm nhân các số hữu tỷ dương.

c) Nhóm cộng các số phức dạng $a + bi$ với a, b nguyên, đẳng cấu với nhóm tích $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

363. a) Chứng minh rằng nhóm các phép quay (tự trùng) của hình tứ diện đều đẳng cấu với nhóm thay phiên bậc 4.

b) Chứng minh rằng nhóm các phép quay (tự trùng) của hình lập phương và hình bát diện đều đẳng cấu với nhóm đối xứng bậc 4.

c) Chứng minh rằng nhóm các phép quay (tự trùng) của hình 12 mặt đều và hình 20 mặt đều đẳng cấu với nhóm thay phiên bậc 5.

364. a) Chứng minh rằng tập các phép quay quanh tâm của một tam giác đều sao cho đỉnh này đến trùng với đỉnh kia lập thành một nhóm đối với tích hai phép quay là sự thực hiện chúng liên tiếp. Chứng minh rằng nhóm đó đẳng cấu với nhóm cộng các lớp đồng dư theo môđun 3.

b) Chứng minh rằng nhóm cộng các lớp đồng dư theo môđun n (n tự nhiên) đẳng cấu với nhóm nhân «tự trùng» của một n — giác đều.

365. Giả sử G là nhóm tất cả các phép biến hình của không gian 3 chiều, H là nhóm các phép tịnh tiến, K là nhóm các phép quay quanh một điểm 0.

a) Chứng minh rằng H là một ước chuẩn của G, còn K thì không phải.

b) Chứng minh rằng $G/H \simeq K$.

366. a) Chứng minh rằng nhóm đối xứng S_3 là ảnh đồng cấu của nhóm đối xứng S_4.

b) Chứng minh rằng nhóm thương của nhóm đối xứng S_4 theo nhóm Klein $K = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ đẳng cấu với nhóm S_3.

367. a) Thiết lập một toàn cấu từ nhóm cộng các số thực lên nhóm nhân các số phức có môđun bằng 1.

b) Chứng minh rằng nhóm nhân các số phức có môđun bằng 1 đẳng cấu với nhóm thương của nhóm cộng các số thực đối với nhóm cộng các số nguyên.

368. Ký hiệu f là tương ứng đặt mỗi số phức ứng với môđun của nó.

a) Chứng minh rằng f là một toàn cấu từ nhóm nhân K các số phức khác không lên nhóm nhân các số thực dương.

b) Tìm $\mathrm{Ker} f$ và nhóm thương $K/\mathrm{Ker} f$.

c) Chứng minh rằng $K/\mathrm{Ker} f$ đẳng cấu với nhóm nhân các số thực dương. Ý nghĩa hình học của sự đẳng cấu đó.

369. Ký hiệu f là ánh xạ từ nhóm cộng K các số phức vào nhóm cộng $\mathbf{R}$ các số thực, xác định bởi

$$f : a + bi \mapsto a.$$

a) Chứng tỏ rằng f là một toàn cấu nhóm.

b) Tìm $\mathrm{Ker} f$ và nhóm thương $K/\mathrm{Ker} f$.

c) Thiết lập đẳng cấu $\varphi : K/\mathbf{R}i \simeq \mathbf{R}$.

Ý nghĩa hình học của đẳng cấu đó.

370. Ký hiệu f là ánh xạ từ nhóm cộng K các số phức vào nhóm cộng $\mathbf{R}$ các số thực, xác định bởi

$$f : a + bi \mapsto b.$$

a) Chứng tỏ rằng f là một toàn cấu nhóm.

b) Tìm $\mathrm{Ker}f$ và nhóm thương $K/\mathrm{Ker}f$.

c) Thiết lập đẳng cấu $\varphi : K/\mathbf{R} \simeq R$.

Ý nghĩa hình học của đẳng cấu này.

371. a) Thiết lập một toàn cấu f từ nhóm nhân $GL(n, \mathbf{R})$ các ma trận thực không suy biến cấp n lên nhóm nhân các số thực khác không $\mathbf{R}^*$.

b) Tìm $\mathrm{Ker}f$.

c) Chứng minh rằng $\mathbf{R}^* \simeq GL(n, \mathbf{R})/SL(n, \mathbf{R})$, trong đó $SL(n, \mathbf{R})$ là tập các ma trận thực cấp n có định thức bằng 1.

372. Ký hiệu G là nhóm cộng các số nguyên Gauxơ, tức là các số dạng $a - bi$ với a, b nguyên và $i^2 = -1$. Ký hiệu X là nhóm $\mathbf{Z}^3$ với phép nhân xác định bởi

$(k_1, k_2, k_3)(l_1, l_2, l_3) = (k_1 + (-1)^{k_3} l_1, k_2 + l_2, k_3 + l_3)$.

a) Thiết lập một toàn cấu f từ X lên G.

b) Tìm $\mathrm{Ker}f$.

c) Chứng minh rằng $X/\langle(1, 0, 0)\rangle_g \simeq G$.

373. Ký hiệu D là tập các đường thẳng Δ trong mặt phẳng có phương trình là $y = ax + b$ ($a \neq 0$, b là các số thực). Ánh xạ

$$D \times D \to D$$
$$(\Delta_1, \Delta_2) \mapsto \Delta_3$$

trong đó Δ_1, Δ_2, Δ_3 lần lượt có các phương trình là $y = a_1 x + b_1$, $y = a_2 x + b_2$, $y = a_1 a_2 x + (b_1 + b_2)$ xác định một phép toán hai ngôi trong D.

a) Chứng minh rằng D là một nhóm với phép toán trên.

b) Ánh xạ $\varphi : D \to \mathbb{R}^*$

$$\Delta \mapsto a$$

trong đó $\mathbb{R}^*$ là nhóm nhân các số thực khác không, Δ là đường thẳng có phương trình $y = ax + b$, là một đồng cấu.

c) Xác định Ker φ. Minh họa định lý đồng cấu nhóm.

374. Cho G_1, G_2 là các nhóm nhân với đơn vị lần lượt là e_1, e_2. Ký hiệu G là tích Đềcác của G_1 và G_2, với phép nhân trên G được xác định như sau :

$$(a, b)(a', b') = (aa', bb')$$

với mọi

$$a, a' \in G_1,\ b, b' \in G_2.$$

a) Chứng minh rằng G là một nhóm. Nhóm này được gọi là *tích* của các nhóm G_1 và G_2 và ký hiệu là $G_1 \times G_2$.

Xét các ánh xạ

$$p_1 : G \to G_1$$
$$(x_1, x_2) \mapsto x_1$$
$$p_2 : G \to G_2$$
$$(x_1, x_2) \mapsto x_2$$
$$q_1 : G_1 \to G$$
$$x_1 \mapsto (x_1, e_2)$$
$$q_2 : G_2 \to G$$
$$x_2 \mapsto (e_1, x_2)$$

b) Chứng minh rằng p_1, p_2 là các toàn cấu. Xác định Kerp_1 và Kerp_2.

c) Chứng minh rằng q_1, q_2 là các đơn cấu. Xác định Imq_1 và Imq_2. Từ đó suy ra rằng G_1 đẳng cấu với bộ phận $G_1 \times e_2$ của G (ký hiệu là A), G_2 đẳng cấu với bộ phận $e_1 \times G_2$ của G (ký hiệu là B).

d) Chứng minh rằng A và B là các ước chuẩn của G, $A \cap B = e$ là đơn vị của G và $AB = BA = G$.

375. Ký hiệu $G = GL(n, \mathbb{R})$ là nhóm nhân các ma trận vuông thực không suy biến cấp n, A là tập các ma trận vuông thực cấp n có định thức bằng ± 1, B là tập các ma trận vuông thực cấp n có định thức dương.

a) Chứng minh rằng A và B là các ước chuẩn của G.

b) Chứng minh rằng G/A đẳng cấu với nhóm nhân các số thực dương.

c) Chứng minh rằng G/B là một nhóm xiclic cấp hai.

376. a) Chứng minh rằng tập tất cả các tự đẳng cấu của một nhóm G đã cho lập thành một nhóm đối với phép tích các ánh xạ. Nhóm này được ký hiệu là Aut$G$.

b) Tìm Aut$Z$; từ đó tìm nhóm các tự đẳng cấu của một nhóm xiclic vô hạn bất kỳ.

c) Cho G là nhóm sinh bởi $\{(12)(34)(56), (34)\}$. Tìm Aut$G$.

d) Cho G là nhóm xiclic cấp 14. Tìm Aut$G$.

e) Cho G là nhóm xiclic cấp 12. Tìm Aut$G$.

377. Giả sử G là một nhóm. Tìm điều kiện để ánh xạ biến mỗi phần tử của G thành phần tử nghịch đảo của nó là một tự đẳng cấu của G.

378. a) Giả sử G là một nhóm xiclic hữu hạn cấp n và φ là một phép biến đổi của G xác định bởi $\varphi(x) = x^k$ với mọi $x \in G$. Khi nào thì φ là một tự đẳng cấu của G? Trong G có còn các phép tự đẳng cấu nào khác không?

b) Chứng minh rằng nhóm Aut$G$ là một nhóm Aben cấp chẵn nếu G là một nhóm xiclic hữu hạn cấp lớn hơn 2.

379. Giả sử φ là một tự đẳng cấu của nhóm G. Chứng minh rằng:

a) $\varphi(e) = e$ (e là đơn vị của G).

b) $\varphi(a^{-1}) = [\varphi(a)]^{-1}$ với mọi $a \in G$.

c) Phần tử a và $\varphi(a)$ có cùng cấp, với mọi $a \in G$.

d) Nếu M là tập sinh của G thì $\varphi(M)$ cũng là tập sinh của G.

c) Mọi lớp các phần tử liên hợp của G lại biến thành lớp các phần tử liên hợp.

380. Cho G là một nhóm. Với mỗi phần tử $a \in G$, ta xét ánh xạ

$$f_a : G \to G$$
$$x \mapsto a^{-1}xa$$

a) Chứng minh rằng f_a là một tự đẳng cấu của G, gọi là *tự đẳng cấu trong* xác định bởi phần tử a.

b) Chứng minh rằng tập các tự đẳng cấu trong lập thành một nhóm con của nhóm Aut$G$. Nhóm này được ký hiệu là Int$G$. Hơn nữa, Int$G \triangleleft$ Aut$G$.

c) Chứng minh rằng một nhóm con H của G là ước chuẩn khi và chỉ khi $f_a(H) = H$ với mọi tự đẳng cấu trong f_a của G. (Vì lý do đó, các ước chuẩn còn được gọi là nhóm con *bất biến*).

381. a) Chứng minh rằng ánh xạ

$$\varphi : G \to \mathrm{Int}G$$

xác định bởi

$$\varphi : a \mapsto f_a$$

là một toàn cấu nhóm.

b) Tìm Kerφ, từ đó chứng minh rằng $G/C(G)$ đẳng cấu với nhóm Int$G$; trong đó $C(G)$ là tâm của nhóm G.

c) Chứng minh rằng các phần tử a và b của nhóm G sinh ra cùng một tự đẳng cấu trong khi và chỉ khi chúng được chứa trong cùng một lớp ghép theo tâm của nhóm.

382. a) Chứng minh rằng nếu G không giao hoán thì Int$G$ không thể là nhóm xiclic; do đó Aut$G$ cũng không thể là nhóm xiclic.

b) Nếu G là nhóm hữu hạn thì Aut$G$ và Int$G$ cũng hữu hạn

c) Tìm ví dụ để chứng tỏ rằng nếu nhóm G đếm được thì nhóm Aut G có thể hữu hạn, lại có thể có lực lượng conctinum.

d) Tìm ví dụ để chứng tỏ rằng dù G_1 không đẳng cấu với G_2 nhưng có thể $\text{Aut}G_1 \cong \text{Aut}G_2$.

e) Nếu G là nhóm không tâm (tức là $C(G) = e$) thì Aut$G$ cũng là nhóm không tâm.

f) Tìm ví dụ để chứng tỏ rằng tồn tại những nhóm không phải là nhóm tự đẳng cấu của nhóm nào cả.

§ 4. VÀI LOẠI NHÓM THƯỜNG GẶP

383. Chứng minh sự tương đương của các mệnh đề sau, mỗi mệnh đề đều có thể dùng làm định nghĩa của nhóm giải được:

a) Nhóm G có một dãy chuẩn tắc giải được hữu hạn.

b) Nhóm G có một dãy bất biến giải được hữu hạn.

c) Chuỗi giảm các đạo nhóm của G sau một số hữu hạn bước ngắt đoạn tại nhóm con đơn vị.

384. Chứng minh rằng:

a) Mọi dãy chuẩn tắc của một nhóm giải được đều mịn hóa được thành dãy giải được; do đó mỗi ước chuẩn của một nhóm giải được đều được chứa trong một dãy giải được nào đó.

b) Nhóm thương của một nhóm giải được là giải được.

c) Nhóm con của một nhóm giải được là giải được.

d) Mở rộng của một nhóm giải được A nhờ một nhóm giải được B là nhóm giải được; tức là nếu A, B giải được, $A' \cong A$ và $G/A' \cong B$ thì G giải được.

e) Mọi nhóm có một dãy chuẩn tắc hữu hạn với các thương giải được đều là nhóm giải được. Đặc biệt, tích trực tiếp của một số hữu hạn nhóm giải được lại là nhóm giải được.

385. Chứng minh rằng:

a) Các thương hợp thành của một nhóm giải được hữu hạn đều là nhóm Aben đơn, tức là nhóm xiclic cấp nguyên tố.

b) Mọi p — nhóm hữu hạn đều giải được đối với số nguyên tố p bất kỳ.

386. Chứng minh rằng:

a) Mọi nhóm con của một nhóm lũy linh lại là nhóm lũy linh.

b) Mọi nhóm thương của nhóm lũy linh đều là nhóm lũy linh

c) Tích trực tiếp của một số hữu hạn nhóm lũy linh là một nhóm lũy linh.

d) Trong một nhóm lũy linh, mọi chuỗi tâm dưới và chuỗi tâm trên đều ngắt đoạn sau cùng một số hữu hạn bước (số này được gọi là *lớp* của nhóm lũy linh).

Ta gọi chuỗi tâm dưới của nhóm G là chuỗi nhóm con

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supset G_k \supseteq \ldots$$

trong đó

$$G_{k+1} = [G_k, G], \ k = 0, 1, 2 \ldots$$

Chuỗi tâm trên của nhóm G là chuỗi nhóm con

$$E = Z_0 \subsetneq Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \ldots \supseteq Z_k \subseteq \ldots$$

trong đó Z_{k+1}/Z_k là tâm của G/Z_k, $k = 0, 1, \ldots$

387. Chứng minh rằng đối với các nhóm Aben thì:

a) Một nhóm là chia được khi và chỉ khi nó là p — chia được đối với mọi số nguyên tố p (ta hiểu nhóm G là p — chia được nếu $p^k G = G$ với mọi số nguyên tố p — thực ra chỉ cần $pG = G$).

b) Một p — nhóm là chia được khi và chỉ khi nó p — chia được.

c) Nếu trong một p — nhóm G mọi phần tử cấp p đều có độ cao vô hạn thì G là nhóm chia được (nếu $a \in G$ thì

số nguyên không âm r lớn nhất sao cho phương trình $p^r x = a$ có nghiệm $x \in A$ được gọi là p — độ cao của tử a. Nếu phương trình $p^r.x = a$ có nghiệm với r bất kỳ thì a gọi là có độ cao vô hạn).

d) Mọi ảnh toàn cấu của một nhóm chia được đều là nhóm chia được.

e) Tích trực tiếp các nhóm là nhóm chia được khi và chỉ khi mỗi hạng tử đều là nhóm chia được.

388. Chứng minh rằng một nhóm Aben chia được khi và chỉ khi nó là nhóm nội xạ.

389. Xét nhóm cộng các số hữu tỷ Q. Chứng minh rằng:

a) Q là hợp của một chuỗi tăng vô hạn các nhóm con xiclic của nó. Từ đó tìm một hệ sinh và các hệ thức xác định của các nhóm đẳng cấu với nhóm cộng Q.

b) Q là nhóm chia được và là nhóm không phân tích trực tiếp được.

390. a) Giả sử p là một số nguyên tố đã cho nào đó. Lập một chuỗi tăng các nhóm xiclic cấp p, cấp p^2, ... cấp p^n, ... Chứng tỏ rằng hợp của chuỗi tăng đó là một nhóm. Nhóm này và các nhóm đẳng cấu với nó được gọi là *nhóm kiểu* p^∞ và được ký hiệu là $C(p^\infty)$.

b) Tìm một ví dụ bằng số về nhóm kiểu p^∞. Tìm một hệ sinh và các hệ thức xác định của các nhóm đẳng cấu với nhóm kiểu p^∞.

c) Chứng minh rằng một nhóm con thực sự của nhóm kiểu p^∞ đều là nhóm xiclic hữu hạn cấp p^n nào đó.

d) Chứng minh rằng nhóm kiểu p^∞ là nhóm chia được, không phân tích trực tiếp được.

391. Chứng minh rằng:

a) Mọi nhóm Aben tùy ý đều đẳng cấu với một nhóm con của một nhóm Aben chia được nào đó.

b) Mọi nhóm Aben chia được khác không G đều phân tích được thành tổng trực tiếp các nhóm con đẳng cấu với nhóm cộng Q các số hữu tỷ hoặc với các nhóm kiểu p^∞ theo các số nguyên tố khác nhau p.

392. Chứng minh rằng:

a) Nếu một nhóm F cùng với ánh xạ $f : S \to F$ là một nhóm tự do trên tập S, thì f là đơn ánh và ảnh $f(S)$ của nó sinh ra F.

b) Nếu (F, f) và (F', f') là các nhóm tự do trên cùng một tập S, thì tồn tại một đẳng cấu duy nhất $j : F \to F'$ sao cho $j \circ f = f'$.

393. Chứng minh rằng:

a) Với mọi tập S, bao giờ cũng tồn tại một nhóm tự do trên S.

b) Mọi nhóm X bất kỳ đều đẳng cấu với một nhóm thương F/K của một nhóm tự do F thích hợp.

Giả sử N là tập con của K sao cho ước chuẩn của F sinh bởi N trùng với K. Hệ thống đẳng thức hình thức $w = 1$, $w \in K$ được gọi là hệ thống hệ thức xác định của nhóm X. Chứng minh rằng:

c) Nếu nhóm G được cho bởi một hệ thống hệ thức xác định nào đó, còn nhóm G' được cho bởi các hệ thức đó và một số hệ thức khác nữa thì nhóm G' đẳng cấu với một nhóm thương nào đó của nhóm G.

394. Tìm hệ sinh và hệ thống hệ thức xác định của các nhóm sau đây:

a) Nhóm cộng các số hữu tỷ Q;

b) Nhóm $C(p^{\infty})$;

c) Nhóm S_3;

d) Nhóm G cho bởi bảng Keli

	1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_2	a_2	a_3	1	a_5	a_6	a_4
a_3	a_3	1	a_2	a_6	a_4	a_5
a_4	a_4	a_6	a_5	1	a_3	a_2
a_5	a_5	a_4	a_6	a_2	1	a_3
a_6	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	1

e) Nhóm H cho bởi bảng Keli

	1	a_2	a_3	a_4
1	1	a_2	a_3	a_4
a_2	a_2	1	a_4	a_3
a_3	a_3	a_4	1	a_2
a_4	a_4	a_3	a_2	1

395. Chứng minh rằng:

a) Nếu một nhóm F cùng với ánh xạ $f : S \to F$ là một nhóm Aben tự do trên tập S thì f là đơn ánh và F được sinh bởi $f(S)$.

b) Nếu (F, f) và (F', f') là các nhóm Aben tự do trên cùng một tập S, thì tồn tại một đồng cấu duy nhất $j : F \to F'$ sao cho $j \circ f = f'$.

c) Với bất kỳ tập S nào, bao giờ cũng tồn tại một nhóm Aben tự do trên S.

d) Mỗi nhóm Aben bất kỳ đều đẳng cấu với một nhóm thương của một nhóm Aben tự do thích hợp.

e) Nhóm Aben tự do sinh bởi tập S đẳng cấu với tổng trực tiếp của một họ các nhóm xiclic vô hạn X_s, được chỉ số hóa bởi mọi $s \in S$.

396. Chứng minh rằng:

a) Nhóm con của một nhóm Aben tự do lại là một nhóm Aben tự do.

b) Một nhóm Aben là xạ ảnh khi và chỉ khi nó là nhóm tự do.

397. Giả sử G là một nhóm hữu hạn, p là một số nguyên tố nào đó. Chứng minh rằng:

a) Đối với mỗi lũy thừa p^k chia hết cấp của G, trong G tồn tại một nhóm con cấp p^k.

b) Nếu p^{k-1} chia hết cấp của G thì mỗi nhóm con cấp p^k của G được nhúng chìm vào một nhóm con nào đó cấp p^{k-1} Đặc biệt các p — nhóm con tối đại của G đúng là các nhóm con cấp p^r, trong đó p^r là lũy thừa cao nhất của p chia hết cấp của G.

c) Tất cả các p—nhóm con tối đại của G đều liên hợp nhau trong G.

d) Số các p—nhóm con tối đại của G đồng dư với 1 theo môđun p và chia hết cấp của G.

398. Chứng minh rằng:

a) Một nhóm hữu hạn bất kỳ nhúng chìm đẳng cấu được vào một nhóm phép thế.

b) Một nhóm bất kỳ nhúng chìm đẳng cấu được vào nhóm các song ánh của một tập nào đó.

399. Giả sử H là một nhóm con chỉ số hữu hạn của nhóm G không nhất thiết hữu hạn. Đặt mỗi phần tử $g \in G$ ứng với phép thế $\widehat{g}$ của tập các lớp phép bên phải của G theo H như sau: Nếu $x_1, x_2, \ldots, x_m$ là các đại diện bên phải của G theo H, thì đặt

$$\widehat{g} = \begin{pmatrix} Hx_1 & \ldots & Hx_m \\ Hx_1 g & \ldots & Hx_m g \end{pmatrix}$$

Chứng minh rằng:

a) Ánh xạ cho bởi công thức trên là một biểu diễn đồng cấu của nhóm G. Hạt nhân của biểu diễn đó là ước chuẩn N của G tối đại trong số các nhóm con được chứa trong H.

b) Mọi nhóm con chỉ số hữu hạn m đều chứa một ước chuẩn chỉ số hữu hạn chia hết cho m và chia hết $m!$

CHƯƠNG VIII

VÀNH VÀ TRƯỜNG.

Một *vành* là một tập X trên đó đã xác định hai phép toán hai ngôi, gọi là phép cộng và phép nhân sao cho :

1) X cùng với phép cộng là một nhóm Âben ;

2) X cùng với phép nhân là một nửa nhóm ;

3) Phép nhân phân phối đối với phép cộng tức là với mọi $x, y, z \in X$ ta có

$$x(y + z) = xy + xz,$$
$$(y + z)x = yx + zx.$$

Từ điều kiện (1) suy ra rằng trong một vành tồn tại phần tử không, ký hiệu là 0 và mỗi phần tử $x \in X$ tồn tại phần tử đối $-x$.

Nếu phép nhân có tính chất giao hoán thì vành X gọi là *vành giao hoán*. Nếu phép nhân có phần tử đơn vị e thì ta gọi e là phần tử đơn vị của vành X. Nếu trong vành X tồn tại các phần tử $a \neq 0$, $b \neq 0$ mà $ab = 0$ thì ta gọi a là *ước bên trái của không*, còn b là *ước bên phải của không*.

Ta định nghĩa *miền nguyên* là một vành có nhiều hơn một phần tử, giao hoán, có đơn vị và không chứa ước của không.

Một tập con A của một vành X được gọi là một *vành con* của vành X nếu với mọi $a, b \in A$ ta có $a + b \in A$, $ab \in A$ và với phép cộng và nhân trong X bản thân A lập thành một vành.

Một vành con I của vành X thỏa mãn điều kiện $xa \in I [ax \in I]$ với mọi $a \in I$, $x \in X$ được gọi là một *iđêan trái* [*iđêan phải*] của vành X. Vành con I của vành X được gọi là một *iđêan* của vành X nếu nó vừa là iđêan trái vừa là iđêan phải của X.

Giả sử A là một iđêan của một vành X. Ta ký hiệu X/A là tập các lớp $x + A$ khác nhau, $x \in X$. Trên tập X/A ta định nghĩa hai phép cộng và nhân như sau :

$$(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$$
$$(x + A) \cdot (y + A) = xy + A,$$

trong đó $x + y$ và xy ở vế phải là tổng và tích các phần tử của vành X. Thế thì X/A trở thành một vành, gọi là *vành thương* của vành X theo iđêan A.

Một miền nguyên X được gọi là một *trường* nếu mọi phần tử khác không của nó đều khả nghịch, tức là với mọi $a \neq 0 \in X$ tồn tại $a^{-1} \in X$ để $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Một tập con A của một trường X được gọi là một *trường con* của trường X nếu với mọi $a, b \in A$ ta có $a + b \in A$, $ab \in A$ và cùng với hai phép toán của của X bản thân A lập thành một trường.

Giả sử X và Y là hai vành (hoặc hai trường). Ánh xạ $f : X \to A$ được gọi là một *đồng cấu* từ vành (trường) X tới vành (trường) Y nếu với mọi $x, y \in X$:

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$
$$f(xy) = f(x) f(y).$$

Nếu $X = Y$ thì f được gọi là một *tự đồng cấu* của vành (trường) X. Nếu ngoài ra f là một toàn ánh, đơn ánh hoặc song ánh thì ta gọi f tương ứng là một toàn cấu, đơn cấu hoặc đẳng cấu.

§1. VÀNH VÀ MIỀN NGUYÊN

400. Cho F là tập tất cả các hàm số thực $f(x) = ax + b$, trong đó a, b là các số thực tùy ý. Ta định nghĩa trong F phép cộng và phép nhân như sau :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(fg)(x) = f[g(x)].$$

a) Chứng tỏ F là một nhóm Aben đối với phép cộng.

b) Chứng tỏ rằng phép nhân kết hợp và không giao hoán.

c) F có lập thành một vành không?

401. Chứng minh rằng các tập hợp sau đây với phép cộng và phép nhân các số lập thành một vành:

Tập hợp các số nguyên **Z**.

... p hợp tất cả các số nguyên bội của một số nguyên ... 10.

c) Tập hợp tất cả các số hữu tỷ **Q**.

d) Tập hợp tất cả các số thực **R**.

e) Tập hợp tất cả các số phức **C**

f) Tập hợp các số dạng $a + b\sqrt{2}$ với a, b nguyên.

g) Tập hợp các số dạng $a + b\sqrt{3}$ với a, b hữu tỷ

h) Tập hợp các số phức dạng $a + bi$, $a, b \in \mathbf{Z}$. Chứng minh rằng các vành đó giao hoán và có đơn vị.

402. Hãy xét xem với phép cộng và phép nhân ma trận các tập hợp sau đây có lập thành một vành không?

a) Tập hợp các ma trận vuông cấp n với phần tử là những số nguyên.

b) Tập hợp các ma trận vuông cấp n với phần tử là những số thực.

c) Tập hợp các ma trận tam giác với phần tử là những số thực (tức là những ma trận mà $a_{ij} = 0$ với $i > j$).

d) Tập hợp các ma trận vuông cấp n đối xứng ($a_{ij} = a_{ji}$) với phần tử là những số thực.

e) Tập hợp các ma trận phản đối xứng ($a_{ij} = -a_{ji}$) với phần tử là những số thực.

f) Tập hợp các ma trận dạng $\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbf{Q}$ hay $a, b \in \mathbf{R}$.

b) Tập hợp các ma trận chéo với phần tử là những số thực.

403. Các tập hợp sau đây có lập thành vành con của vành các số thực không :

a) Tập hợp các số thực dạng $a + b\sqrt[3]{2}$, a, b hữu tỷ.

b) Tập hợp các số thực dạng $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, a, b, c hữu tỷ.

c) Tập hợp các số thực dạng $a + b\sqrt{3}$, a, b nguyên.

404. Các tập hợp sau đây có lập thành vành con của vành các hàm số thực không (phép cộng và phép nhân các hàm định nghĩa như trong bài tập 1) :

a) Tập hợp các hàm dạng $a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$

với a_i, b_j là các số thực.

b) Tập hợp các hàm dạng $a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx$, a_i thực.

c) Tập hợp các hàm dạng $\sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx$, b_k thực.

405. Cho một số nguyên $n > 0$. Hai số nguyên a và b được gọi là *đồng dư theo môđun* n và ký hiệu là $a \equiv b \pmod{n}$ nếu hiệu $a - b$ chia hết cho n (xem bài tập ở chương I). Ký hiệu Z_n là tập hợp các lớp đồng dư theo mod n.

a) Ta định nghĩa phép cộng và phép nhân trong Z_n như sau : Nếu các số nguyên a, b, $a + b$ và ab tương ứng

thuộc các lớp A, B, C, D thì ta định nghĩa $A + B = C$, $AB = D$. Chứng minh rằng với các phép toán đó Z_n lập thành một vành giao hoán, có đơn vị, gọi là vành các số nguyên mod n.

b) Tìm tất cả các ước của không trong vành Z_n các số nguyên mod 6.

c) Chứng minh rằng trong vành Z_n lớp A khả nghịch khi và chỉ khi A chứa các số nguyên tố với n.

406. Giả sử $\mathcal{M}$ là vành các ma trận vuông cấp n với phần tử là những số thực. Chứng minh rằng :

a) Ma trận A là ước (bên trái và bên phải) của không trong vành M khi và chỉ khi $|A| = 0$.

b) Tập hợp $\mathcal{N}$ tất cả các ma trận mà từ dòng thứ hai trở đi đều bằng không là một vành con của $\mathcal{M}$ và mọi ma trận khác không của $\mathcal{N}$ đều là ước bên phải của không trong vành $\mathcal{N}$.

Hãy xét xem những ma trận nào không phải là ước bên trái của không trong vành $\mathcal{N}$.

c) Trong vành $\mathcal{N}$ tồn tại vô số đơn vị bên trái.

407. Cho tập hợp $G = \{a, b, c, d\}$ với phép toán cộng cho bởi bảng sau :

+	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

a) Chứng minh rằng G là một nhóm cộng giao hoán.

b) Giả sử E là tập hợp tất cả các phép tự đồng cấu của nhóm G. Chứng minh rằng với các phép toán

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \; f, g \in E, \; x \in G,$$
$$(fg)(x) = f[g(x)]$$

thì E là một vành không giao hoán và chứa ước của không.

408. Cho tập hợp **Z** tất cả các *số nguyên*. Lập tích Đề-các **Z** $\times$ **Z**.

a) Ta định nghĩa các phép toán cộng và nhân trong **Z** $\times$ **Z** như sau :

$$(a, b) + (m, n) = (a + m, b + n),$$
$$(a, b) \cdot (m, n) = (am, bn).$$

Chứng minh rằng với các phép toán đó tập **Z** $\times$ **Z** lập thành một vành giao hoán, có đơn vị. Hãy tìm tất cả các ước của không của vành đó.

b) Nếu định nghĩa các phép toán cộng và nhân trong **Z** $\times$ **Z** như sau :

$$(a, b) + (m, n) = (a + m, b + n),$$
$$(a, b) \cdot (m, n) = (am, an + bm + bn)$$

thì tập **Z** $\times$ **Z** cũng lập thành một vành giao hoán, có đơn vị. Hãy tìm các ước của không của vành đó.

409. Giả sử trong một tập hợp X đã cho hai phép toán cộng và nhân sao cho :

a) X cùng với phép cộng là một nhóm ;

b) X cùng với phép nhân là một vị nhóm ;

c) Phép nhân phân phối đối với phép cộng.

Chứng minh rằng X là một vành.

410. Cho một vành A có tính chất : với mọi $a \in A$ ta có $a^2 = a$ (một vành như vậy được gọi là *vành Bula*). Chứng minh rằng :

a) $x = -x$ với mọi $x \in A$

b) A là một vành giao hoán.

c) Nếu A không chứa ước của 0 thì hoặc $A = \{0\}$ hoặc A chỉ có hai phần tử.

d) Nếu ký hiệu $\mathcal{P}(X)$ là tập tất cả các tập con của tập X và trên $\mathcal{P}(X)$ xác định các phép toán cộng và nhân như sau : với $U, V \subset X$.

$$U \dotplus V = (U \cap (X \setminus V)) \cup (V \cap (X \setminus U)),$$
$$U \,\dot{.}\, V = U \cap V$$

thì $\mathcal{P}(X)$ là một vành Bulơ.

411. Giả sử X là một vành giao hoán.

a) Chứng minh rằng giao của một tập tùy ý các iđêan của X cũng là một iđêan của X.

b) Ta định nghĩa iđêan chính (a) sinh bởi phần tử a của vành X là giao của tất cả các iđêan của X chứa a. Chứng minh rằng iđêan (a) gồm tất cả các phần tử dạng $xa + na$, trong đó x là phần tử tùy ý thuộc X và n là số nguyên tùy ý.

c) Nếu vành giao hoán X chứa đơn vị thì giao của tất cả các iđêan của X chứa các phần tử $a_1, a_2, \dots a_n$ của X là iđêan gồm tất cả các phần tử dạng $\sum_{i=1}^{n} x_i a_i$, $x_i \in X$.

412. Cho A là một vành tùy ý. Chứng minh rằng các tập sau đây là các iđêan của vành A :

a) $B = \{b \in A \mid nb = 0\}$, trong đó n là một số nguyên cho trước.

b) $B = \{b \in A \mid ba = 0$ với mọi $a \in A\}$.

c) $B = \{b \in A \mid ab = 0$ với mọi $a \in A\}$.

413. Giả sử A là một miền nguyên, e là đơn vị của A và giả sử n là số nguyên dương bé nhất sao cho $ne = 0$. Chứng minh rằng :

a) n là một số nguyên tố.

b) Với mọi $a \in A$, $a \neq 0$, đẳng thức $ma = 0$, m nguyên xảy ra khi và chỉ khi m chia hết cho n.

c) Bộ phận $kA = \{ka \mid a \in A\}$, k là một số nguyên cho trước, là một iđêan của A.

414. Chứng minh rằng trong vành M tất cả các ma trận vuông cấp n với phần tử là những số thực không có iđêan nào khác không và khác M.

415. Một iđêan A của một vành X được gọi là một *iđêan tối đại* nếu $A \neq X$ và các iđêan của X chứa A chính là X và A. Chứng minh rằng :

a) Trong vành số nguyên $\mathbb{Z}$ các iđêan tối đại là các iđêan chính (p) sinh bởi một số nguyên tố p tùy ý.

b) Nếu vành X chứa đơn vị thì mọi iđêan của X được chứa trong một iđêan tối đại.

416. Cho G là nhóm con của nhóm cộng Q/Z các số hữu tỷ theo môđun 1, gồm các lớp (mod 1) các số hữu tỷ dạng $\frac{k}{p^n}$, trong đó k và n là các số nguyên tùy ý không âm, còn p là một số nguyên tố đã chọn. Ta xác định phép nhân trên G bằng cách coi tích của hai phần tử tùy ý thuộc G đều bằng không.

Chứng minh rằng G là một vành không chứa đơn vị và trong G không tồn tại iđêan tối đại nào cả. (so sánh với bài 415 b)).

417. Giả sử A là một miền nguyên và mỗi nhóm con của nhóm cộng của A là một iđêan của A. Chứng minh rằng A đẳng cấu với một vành con của vành số nguyên $\mathbb{Z}$ hoặc A đẳng cấu với vành Z_p các số nguyên mod p, trong đó p là một số nguyên tố.

418. Một iđêan P của một vành giao hoán X được gọi là một iđêan *nguyên tố* nếu $P \neq X$ và với $u, v \in X$ tích $uv \in P$ kéo theo $u \in P$ hoặc $v \in P$. Chứng minh rằng :

a) X/P không chứa ước của không khi và chỉ khi P là một iđêan nguyên tố.

b) Nếu vành X có đơn vị thì mỗi iđêan tối đại của X đều là iđêan nguyên tố.

c) Có những vành chứa iđêan tối đại mà không nguyên tố.

d) Nếu A là một iđêan tùy ý khác X, B là tập tất cả các phần tử $x \in X$ sao cho tồn tại một số nguyên dương n (phụ thuộc x) để $x^n \in A$ thì B là một iđêan của X, và nếu $B \neq X$ thì B cũng trùng với giao của tất cả các iđêan nguyên tố của X chứa A.

419. Cho vành $\mathbf{Z}[x]$ tất cả các đa thức của x với hệ số nguyên.

a) Giả sử (n) là iđêan sinh bởi số nguyên $n > 1$ trong vành $\mathbf{Z}[x]$. Chứng minh rằng vành thương $\mathbf{Z}[x]/(n)$ đẳng cấu với vành $Z_n[x]$ các đa thức của x với hệ số thuộc vành Z_n các số nguyên mod n.

b) Giả sử $I = (x, 2)$ là iđêan sinh bởi hai phần tử x và 2 trong vành $\mathbf{Z}[x]$. Chứng minh rằng I gồm tất cả các đa thức với hệ số tự do chẵn và I không phải là một iđêan chính.

c) Chứng minh rằng vành thương $\mathbf{Z}[x]/I$ đẳng cấu với vành Z_2 các số nguyên mod 2.

420. Cho $\mathbf{R}[x, y]$ là vành đa thức của hai ẩn x, y với hệ số thực, I là tập tất cả các đa thức của vành đó không chứa hệ số tự do. Chứng minh rằng :

a) I là một iđêan, nhưng không phải là một iđêan chính.

b) Vành thương $\mathbf{R}[x, y]/I$ đẳng cấu với vành số thực $\mathbf{R}$.

421. Cho p là một số nguyên tố nào đó. Giả sử X là tập tất cả các dãy số nguyên $\{x_n\} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ có tính chất $x_n \equiv x_{n+1} \pmod{p^{n+1}}$ với mọi $n \geqslant 0$. Trong tập X ta xét quan hệ tương đương $\sim$ sau :

$\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ khi và chỉ khi $x_n \equiv x'_n \pmod{p^{n+1}}$ với mọi $n \geqslant 0$. Ký hiệu P là tập thương $X/\sim$. Ta định nghĩa trong tập P các phép toán cộng và nhân sau đây :

Nếu ký hiệu $\overline{\{x_n\}}$ là lớp chứa dãy $\{x_n\}$ thì

$$\overline{\{x_n\}} + \overline{\{y_n\}} = \overline{\{x_n + y_n\}}$$
$$\overline{\{x_n\}} \cdot \overline{\{y_n\}} = \overline{\{x_n y_n\}}.$$

Chứng minh rằng :

a) Với các phép toán đó tập P là một vành giao hoán chứa đơn vị, gọi là vành các số nguyên p — adic.

b) P chứa một vành con đẳng cấu với vành số nguyên Z.

c) Trong vành P phần tử $\overline{\{x_n\}}$ khả nghịch khi và chỉ khi $x_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$.

422. Giả sử X là một vành, Y là một tập trên đó xác định hai phép toán cộng và nhân, và $f : X \to Y$ là một toàn ánh thỏa mãn : với mọi $x, y \in X$

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$
$$f(xy) \quad = f(x) \cdot f(y).$$

Chứng minh rằng :

a) Y là một vành.

b) Nếu X là vành giao hoán thì Y cũng là vành giao hoán và nếu X có đơn vị thì Y cũng có đơn vị.

c) Nếu X là một miền nguyên thì Y cũng là miền nguyên.

423. Chứng minh rằng :

a) Mọi vành X đẳng cấu với một vành con của một vành chứa đơn vị.

b) Mọi vành X chứa đơn vị đẳng cấu với một vành con của vành tất cả các tự đồng cấu của nhóm cộng của X.

424. Giả sử Z là vành số nguyên, X là một vành tùy ý với đơn vị e,

a) Chứng minh rằng ánh xạ $\varphi : Z \to X$ mà $\varphi(n) = ne$ là một đồng cấu từ vành Z tới vành X. Tìm ảnh $\varphi(Z)$.

b) Tìm tất cả các tự đồng cấu của vành số nguyên Z.

425. Giả sử X và Y là hai vành tùy ý, $f : X \to Y$ là một đồng cấu từ vành X tới vành Y, $A \subset X$, $B \subset Y$ là các idêan sao cho $f(A) \subset B$. Giả sử $\varphi : X \to X/A$, $\psi : Y \to Y/B$ là các toàn cấu chính tắc (tức là $\varphi(x) = x + A$, $\psi(y) = y + B$ với mọi $x \in A$, $y \in B$). Chứng minh rằng:

a) Tồn tại một đồng cấu duy nhất $\overline{f} : X/A \to Y/B$ sao cho $\overline{f}\varphi = \psi f$.

b) Nếu f là một toàn cấu thì $\overline{f}$ cũng là một toàn cấu.

§ 2. VÀNH CHÍNH. VÀNH ƠCLIT

426. A được gọi là một *vành chính* nếu nó là một miền nguyên và mọi idêan của A đều là idêan chính (xem bài tập 411). Chứng minh rằng:

a) Vành số nguyên $\mathbb{Z}$ là một vành chính.

b) Vành $\mathbb{R}[x]$ các đa thức với hệ số thực là một vành chính.

427. Giả sử X là một miền nguyên. Phần tử $a \in X$ được gọi là *ước* của phần tử $b \in X$ nếu tồn tại $c \in X$ sao cho $b = ac$. Nếu a đồng thời là ước của x, $y \in X$ thì a được gọi là *ước chung* của x và y. Phần tử a được gọi là *ước chung lớn nhất* của x và y nếu a là ước chung của x và y và mọi ước chung của x và y đều là ước của a. Chứng minh rằng:

a) Trong một vành chính tồn tại ước chung lớn nhất của hai phần tử tùy ý.

b) Nếu u là một ước chung lớn nhất của hai phần tử a và b trong vành chính X thì tồn tại r, $s \in X$ sao cho $u = ar + bs$.

428. Cho một vành chính A với phần tử đơn vị 1. Hai phần tử a, $b \in A$ được gọi là *nguyên tố cùng nhau* nếu

ước chung lớn nhất của a và b là một phần tử khả nghịch của vành A.

Chứng minh rằng :

a) Nếu a và b nguyên tố cùng nhau thì tồn tại các phần $x, y \in A$ sao cho $1 = ax + by$.

b) Nếu a là ước của bc, a, b nguyên tố cùng nhau thì a là ước của c.

429. Giả sử x là một phần tử khác 0 và không khả nghịch của một vành giao hoán có đơn vị A. Ta gọi x là một phần tử *bất khả quy* của A nếu với mọi sự phân tích $x = ab$ trong A, một trong các phần tử a và b phải là khả nghịch. Chứng minh rằng :

a) Trong vành số nguyên Z chỉ có các số nguyên tố và các số đối của chúng là những phần tử bất khả quy.

b) Trong một vành chính A phần tử $x \neq 0$ và không khả nghịch là bất khả quy khi và chỉ khi với mọi $a, b \in A$, x là ước của ab kéo theo x là ước của a hoặc x là ước của b.

430. Chứng minh rằng mọi phần tử $x \neq 0$ và không khả nghịch của một vành chính A đều biểu thị được dưới dạng tích của các phần tử bất khả quy. Sự phân tích này là duy nhất nếu không kể đến các nhân tử khả nghịch và thứ tự của các nhân tử.

431. Giả sử A là tập hợp tất cả các số phức dạng $a + b\sqrt{-3}$, trong đó a và b là các số nguyên. Chứng minh rằng :

a) A lập thành một miền nguyên đối với phép cộng và phép nhân các số phức.

b) Trong vành A, các số 2, $1 + \sqrt{-3}$ và $1 - \sqrt{-3}$ là những phần tử bất khả quy.

c) Số 4 trong A có hai sự phân tích thành tích của các phần tử bất khả quy khác nhau, do đó A không phải là một vành chính.

432. Chứng minh rằng:

a) Trong một vành chính các iđêan nguyên tố khác không là các iđêan tối đại (xem các bài tập 415 và 412).

b) Vành thương và vành con của một vành chính nói chung không phải là một vành chính.

433. Miền nguyên X được gọi là một *vành Ơclit* nếu mỗi phần tử $x \in X$, $x \neq 0$ đặt tương ứng với một số nguyên $n(x) \geqslant 0$ thỏa mãn điều kiện sau:

Với hai phần tử a, b tùy ý thuộc X, $b \neq 0$, tồn tại các phần tử q, $r \in X$ sao cho

$$a = bq + r,$$

trong đó hoặc $r = 0$ hoặc $n(r) < n(b)$.

Chứng minh rằng:

a) Vành số nguyên Z và vành R(x) các đa thức của x với hệ số thực là các vành Ơclit.

b) Mỗi vành Ơclit là vành chính.

434. a) Chứng minh rằng tập hợp các số phức dạng $a + bi$, a, b nguyên là một vành Ơclit (với phép cộng và nhân số phức).

b) Trong vành này hãy phân tích các số 2, 3, 5 thành tích các nhân tử bất khả quy.

TRƯỜNG

435. Chứng minh rằng các tập hợp sau đây với phép cộng và phép nhân các số lập thành một trường:

a) Tập hợp tất cả các số hữu tỷ Q.

b) Tập hợp tất cả các số thực R.

c) Tập hợp tất cả các số phức C.

d) Tập hợp các số thực dạng $a + b\sqrt{2}$, với a, b hữu tỷ tùy ý.

e) Tập hợp tất cả các số thực dạng $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, với a, b, c là các số hữu tỷ tùy ý.

f) Tập hợp tất cả các số thực dạng $a + b\sqrt[3]{5} + c\sqrt[3]{25}$, với a, b, c là các số hữu tỷ tùy ý.

436. Chứng minh rằng các tập hợp sau đây với phép cộng và phép nhân các ma trận lập thành một trường:

a) Tập hợp các ma trận dạng $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbf{R}$.

b) Tập hợp các ma trận dạng $\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbf{Q}$.

c) Tập hợp các ma trận vuông cấp n có dạng aI, trong đó $a \in \mathbf{R}$, I là ma trận đơn vị cấp n.

437. Chứng minh rằng vành Z_n các số nguyên mod n là một trường khi và chỉ khi n là một số nguyên tố.

438. Chứng minh rằng mọi trường đều có trường con bé nhất (theo quan hệ bao hàm) đẳng cấu hoặc với trường số hữu tỷ Q, hoặc với trường Z_p các số nguyên mod p, trong đó p là một số nguyên tố.

439. Chứng minh rằng:

a) Trường các ma trận dạng $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ trong bài tập 437, a) đẳng cấu với trường các số phức C.

b) Trường các ma trận dạng $\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix}$ trong bài tập 437, b) đẳng cấu với trường các số thực dạng $a + b\sqrt{2}$ trong bài tập 435, d).

440. Chứng minh rằng:

a) Qua mọi phép tự đẳng cấu của một trường số K tùy ý (là một trường con tùy ý của trường số phức)

trường con các số hữu tỉ được ánh xạ đồng nhất lên chính nó. Đặc biệt trường số hữu tỉ chỉ có một tự đẳng cấu duy nhất là ánh xạ đồng nhất.

b) Trường số thực chỉ có một tự đẳng cấu duy nhất là ánh xạ đồng nhất.

c) Trường số phức chỉ có hai tự đẳng cấu biến các số thực thành số thực là ánh xạ đồng nhất và ánh xạ biến mỗi số phức thành số phức liên hợp.

d) Trường Z_p các số nguyên mod p chỉ có một tự đẳng cấu duy nhất là ánh xạ đồng nhất.

441. Giả sử X là một miền nguyên. Ta gọi trường K là *trường các thương* của miền nguyên X nếu X đẳng cấu với một vành con X' của K sao cho mỗi phần tử của K có dạng $x^{-1}y$, $x, y \in X'$, x khác không.

a) Chứng minh rằng mỗi miền nguyên X đều có trường các thương xác định duy nhất sai kém một đẳng cấu.

b) Tìm trường các thương của vành số nguyên Z.

c) Chứng minh rằng vành P các số nguyên p — adic là một miền nguyên và tìm trường các thương của nó (xem bài tập 421).

442. Giả sử K là một trường, e là phần tử đơn vị của K. Nếu với mọi số nguyên $m \neq 0$ ta đều có $me \neq 0$ thì ta nói trường K có đặc số không.

Nếu tồn tại một số nguyên dương p bé nhất sao cho $pe = 0$ thì ta nói trường K có đặc số p. Chứng minh rằng:

a) Đặc số của một trường tùy ý hoặc bằng không, hoặc là một số nguyên tố.

b) Đặc số của trường Z_p là p.

443. Chứng minh rằng trong một trường K đặc số p

a) $(x+y)^p = x^p + y^p$.

b) $(x-y)^p = x^p - y^p$.

c) $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^p = x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p$.

d) $(x-y)^{p-1} = \sum_{i=0}^{p-1} x^i y^{p-1-i}$.

444. Chứng minh rằng :

a) Mỗi miền nguyên hữu hạn là một trường.

b) Mỗi trường hữu hạn đều có đặc số khác không.

c) Mỗi trường hữu hạn đặc số p có số phần tử là lũy thừa của p.

445. Chứng minh rằng nhóm nhân (các phần tử khác 0) của một trường hữu hạn là một nhóm xiclic.

446. Giả sử K là một trường hữu hạn có q phần tử. Chứng minh rằng với mọi phần tử $x \in K$, ta có $x^q = x$.

447. Nếu trường P là một trường con của trường K thì ta cũng nói trường K là mở rộng của trường P. Chứng minh rằng :

a) Nếu trường K là mở rộng của trường P thì K là một không gian vectơ trên trường P. Số chiều của không gian vectơ đó được ký hiệu là $[K : P]$.

b) Trường con bé nhất $P(\alpha)$ của trường K chứa trường P và phần tử $\alpha \in K$ gồm tất cả các biểu thức hữu tỷ của α với hệ tử thuộc P.

448. Giả sử trường K là mở rộng của trường P. Phần tử $\alpha \in K$ gọi là *phần tử đại số* trên P nếu tồn tại các phần tử $a_0, a_1, \ldots, a_n \in P$ không đồng thời bằng không $(n \geqslant 1)$ sao cho $a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_n\alpha^n = 0$. Nếu mọi phần tử $\alpha \in K$ đều là phần tử đại số trên P thì ta nói K là *mở rộng đại số* của P.

Chứng minh rằng nếu $[K : P]$ hữu hạn (xem bài tập trên) thì K là mở rộng đại số của P.

449. Mở rộng K của trường P được gọi là *mở rộng hữu hạn* nếu $[K : P]$ hữu hạn. Chứng minh rằng nếu E là mở rộng của trường K và K là mở rộng của trường P thì E là mở rộng hữu hạn của trường P khi và chỉ khi E là mở rộng hữu hạn của trường K và K là mở rộng hữu hạn của trường P.

450. Giả sử K là mở rộng của trường P, $x \in K$ là một phần tử đại số trên P. Chứng minh rằng trường $P(x)$ (xem bài tập 447) là một mở rộng hữu hạn của trường P.

451. Ký hiệu một trường hữu hạn có q phần tử là $GF(q)$.

Chứng minh rằng :

a) Nếu $f(x)$ là một đa thức với hệ tử thuộc trường $GF(q)$ và β là một nghiệm của $f(x)$ trong một trường mở rộng của $GF(q)$ thì β^q cũng là nghiệm của $f(x)$.

b) Nếu K là một trường mở rộng của $GF(q)$ chứa tất cả các nghiệm của đa thức $x^{q^n} - x$, thì tập tất cả các nghiệm đó là một trường con của trường K.

452. Giải hệ phương trình tuyến tính sau đây trên trường Z_2 và trên trường Z_5 :

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 2z = 2 \\ 2x + z = 1. \end{cases}$$

453. Giải hệ phương trình tuyến tính sau đây trên trường Z_5 và trên trường Z_7 :

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 3y + 2z = 1. \end{cases}$$

454. Giải hệ phương trình tuyến tính sau đây trên trường Z_7:

$$\begin{cases} x + 5z + 2t = 0 \\ 3x + 4y + z + t = 0 \\ 3x + 2z + 4t = 1 \\ 6x + 2y + 6z + 5t = 4 \end{cases}$$

CHƯƠNG IX

ĐA THỨC

Một đa thức của ẩn x trên trường P có thể viết dưới dạng *chính tắc tiến*

$$f(x) = a_n + a_{n-1}x + \dots + a_1x^{n-1} + a_0x^n, \quad a_i \in P,$$
$$i = 1, \dots, n$$

hoặc dạng *chính tắc lùi*.

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad a_i \in P,$$
$$i = 1, \dots, n.$$

Nếu hệ tử cao nhất $a_0 \neq 0$ thì $f(x)$ được gọi là đa thức bậc n. Hai đa thức được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi dưới dạng chính tắc các hệ tử của các lũy thừa tương ứng của ẩn x bằng nhau. Do đó một đa thức bằng đa thức không (phân biệt với khái niệm nghiệm) khi và chỉ khi mọi hệ tử của nó dưới dạng chính tắc đều bằng 0. Nếu trường P có đặc số không thì điều đó xảy ra khi và chỉ khi đa thức có giá trị bằng không tại mọi giá trị của ẩn.

Cho hai đa thức

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ và $g(x) = b_0x^m + \dots + b_m$, tích của chúng là đa thức

$$f(x) \cdot g(x) = c_0x^{n+m} + \dots + c_{n+m},$$

trong đó $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$, $k = 0, \dots, n + m$.

Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là hai đa thức trên trường P được viết dưới dạng lùi như trên, thế thì bao giờ cũng tìm được một cặp đa thức $q(x)$ và $r(x)$ duy nhất cũng trên trường P sao cho $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$, trong đó bậc của $r(x)$ bé hơn bậc của $g(x)$ hoặc $r(x) = 0$. Các đa thức $q(x)$ và $r(x)$ tìm được lần lượt được gọi là thương và dư trong *phép chia theo lũy thừa lùi* của $f(x)$ cho $g(x)$. Nếu $r(x)$ bằng đa thức không thì ta nói $f(x)$ *chia hết* cho $g(x)$, hoặc $g(x)$ *chia hết* $f(x)$, hoặc $f(x)$ là *bội* của $g(x)$, hoặc $g(x)$ là ước của $f(x)$.

Giả sử đã cho hai đa thức viết dưới dạng tiến $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ và $g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$ với giả thiết $b_0 \neq 0$. Thế thì với một số nguyên không âm k cho trước, bao giờ cũng tìm được một cặp đa thức duy nhất $q(x)$ và $r(x)$ sao cho

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + x^{k+1} r(x)$$

với bậc của $q(x) \leq k$ hoặc $q(x) = 0$. Cặp đa thức $q(x)$ và $r(x)$ tìm được đó được gọi lần lượt là *thương* và *dư* trong *phép chia cấp k* của $f(x)$ cho $g(x)$ *theo lũy thừa tiến*.

Nếu không nói gì hơn, ta luôn hiểu là các đa thức được viết dưới dạng lùi. Một đa thức $d(x)$ chia hết các đa thức $f(x)$ và $g(x)$ đã cho được gọi là *ước chung* của $f(x)$ và $g(x)$. Nếu $d(x)$ là ước chung của $f(x)$ và $g(x)$, chia hết cho mọi ước chung khác của hai đa thức ấy thì $d(x)$ được gọi là *ước chung lớn nhất* của $f(x)$ và $g(x)$, viết tắt là UCLN và ký hiệu là $(f(x), g(x)) = d(x)$. Để tìm UCLN ta dùng *thuật toán Ơclit* bằng cách thực hiện một số hữu hạn phép chia liên tiếp theo lũy thừa lùi như sau:

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x),$$
$$g(x) = r(x) \cdot q_1(x) + r_1(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x) \cdot q_k(x) + r_k(x),$$
$$r_{k-1}(x) = r_k(x) \cdot q_{k+1}(x).$$

Đa thức dư cuối cùng trong dãy phép chia liên tiếp đó chính là UCLN phải tìm : $r_k(x) = d(x) = (f(x), g(x))$. Để đảm bảo tính duy nhất của UCLN, ta quy ước rằng hệ tử cao nhất của UCLN của hai đa thức bao giờ cũng lấy bằng 1.

Từ thuật toán Ơclit suy ra rằng : nếu $d(x) = (f(x), g(x))$ thì có thể tìm được hai đa thức $u(x)$, $v(x)$ trên P sao cho

$$f(x) \cdot u(x) + g(x) \cdot v(x) = d(x),$$

hơn nữa nếu bậc của $f(x)$ và $g(x)$ lớn hơn không thì ta còn có thể chọn sao cho bậc của $u(x)$ bé hơn bậc của $g(x)$ và bậc của $v(x)$ bé hơn bậc của $f(x)$.

Ta có *định lý cơ bản : Mọi đa thức bậc $n \geqslant 1$ trên trường số phức đều có ít nhất một nghiệm phức* (do đó có đủ n nghiệm phức).

Một đa thức $p(x)$ bậc n $(n > 0)$ trên trường P được gọi là đa thức *bất khả quy* trên P (hoặc không phân tích được trên P) nếu nó không thể viết được dưới dạng tích của hai đa thức bậc khác không và bé hơn n của vành $P[x]$.

Mỗi đa thức bậc > 0 của vành $P[x]$ đều phân tích được thành tích của những đa thức bất khả quy trên P và sự phân tích đó là duy nhất nếu không kể đến thứ tự các nhân tử và các nhân tử bậc không.

Trên trường số phức, chỉ có các nhị thức bậc nhất là đa thức bất khả quy. Trên trường số thực, các nhị thức bậc nhất và các tam thức bậc hai với biệt thức âm và chỉ chúng là các đa thức bất khả quy. Trên trường [illegible]

ta có thể tìm được những đa thức bất khả quy bậc bất kỳ, chẳng hạn những đa thức thỏa mãn tiêu chuẩn Âyđenstanh sau đây : Giả sử $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ là một đa thức với hệ số nguyên, trong đó hệ số cao nhất a_0 không chia hết cho một số nguyên tố p, còn các hệ số khác đều chia hết cho p, nhưng số hạng tự do không chia hết cho p^2. Thế thì đa thức $f(x)$ là bất khả quy trên trường số hữu tỷ.

Trong nhiều bài toán, đặc biệt là trong các bài toán xây dựng đa thức $f(x)$ bậc $n-1$ khi biết giá trị của đa thức tại n điểm : $f(x_i) = c_i$, $i = 1, 2, ..., n$, ta có thể dùng công thức *nội suy Lagrăng* sau đây :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}.$$

Nếu ký hiệu $\varphi(x)$ là đa thức bậc n có n nghiệm là các số $x_1, x_2, ..., x_n$ đã cho trên, thì công thức Lagrăng còn có thể viết là

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)\,\varphi(x)}{(x-x_i)\,\varphi'(x_i)}.$$

Để tìm nghiệm hữu tỷ của một đa thức trên trường số hữu tỷ, ta dùng *định lý* : Cho đa thức $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$. Nếu phân số tối giản $\frac{p}{q}$ (p, q là những số nguyên và $q \neq 0$) là nghiệm hữu tỷ của $f(x)$, thì p phải là một ước của số hạng tự do a_n, và q là một ước của hệ số cao nhất a_0. Để giảm bớt việc tính toán ta có thể dùng nhận xét sau : Về lý thuyết, chỉ cần xét việc tìm nghiệm nguyên của các đa thức với hệ số nguyên. Muốn thế, chỉ cần xem 1 và -1 có phải là nghiệm của $f(x)$

không, nếu không phải thì chỉ cần xét những số nguyên k là ước của số hạng tự do sao cho :

$$\frac{f(1)}{1-k} \text{ và } \frac{f(-1)}{1+k} \text{ nguyên}$$

và chỉ cần thử với những số nguyên k đó mà thôi (chẳng hạn dùng sơ đồ Hoocne để thử).

Để giải phương trình bậc ba dạng $x^3 + px + q = 0$, ta dùng công thức Cacđanô — Tactali :

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

trong đó nếu đã chọn được một cặp giá trị u_1, v_1 sao cho $u_1v_1 = -\frac{p}{3}$ thì phương trình sẽ có ba nghiệm phức là $x_1 = u_1 + v_1$, $x_2 = u_1\varepsilon + v_1\varepsilon^2$, $x_3 = u_1\varepsilon^2 + v_1\varepsilon$, trong đó $\varepsilon^3 = 1$. Nếu phương trình bậc ba có dạng $y^3 + ay^2 + by + c = 0$ thì bằng cách đặt $y = x - \frac{a}{3}$, ta sẽ đưa phương trình về dạng trên. Để giải phương trình bậc bốn bằng căn thức, ta dùng phương pháp Ferari, đưa về việc giải một phương trình phụ bậc ba và hai phương trình bậc hai.

Các phương trình bậc năm trở lên không giải được bằng căn thức. Ngay đối với các phương trình bậc ba, bậc bốn, nhiều khi ta cũng dùng các phương pháp tính gần đúng các nghiệm.

Trước hết, để tìm cận các nghiệm, ta có thể dùng phương pháp đơn giản sau : Cho đa thức

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n, \ a_0 \neq 0 ;$$

nên ký hiệu $A = \max(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ thì giá trị tuyệt đối của các nghiệm của nó không vượt quá $\frac{A}{|a_0|} + 1$. Nhưng thường ta dùng *định lý Niutơn*: Nếu tồn tại số $c > 0$ sao cho $f(c), f'(c), \ldots, f^{(n)}(c)$ đều dương, thì c là cận trên các nghiệm dương của $f(x)$. Cận dưới các nghiệm dương của $f(x)$ là nghịch đảo của cận trên các nghiệm dương của $x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$. Nếu c là cận trên các nghiệm dương của $x^n f \times$ $\times \left(-\frac{1}{x}\right)$ thì $-\frac{1}{c}$ sẽ là cận trên các nghiệm âm của $f(x)$. Còn nếu d là cận trên các nghiệm dương của $f(-x)$ thì $-d$ sẽ là cận dưới các nghiệm âm của $f(x)$.

Sau khi đã tìm được cận các nghiệm, ta *tách các nghiệm* trong từng đoạn bằng phương pháp Stuyếc như sau: Cho đa thức $f(x)$, ta ký hiệu $f_0(x) = f(x)$, $f_1(x) = f'(x)$. Áp dụng thuật toán Ơclit cho các đa thức $f_0(x)$ và $f_1(x)$, mỗi lần được dư lại đem đổi dấu ta được:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= f_1(x)\, q_1(x) - f_2(x), \\ f_1(x) &= f_2(x)\, q_2(x) - f_3(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{m-2}(x) &= f_{m-1}(x)\, q_{m-1}(x) - f_m(x). \end{aligned}$$

trong đó $f_m(x) = (f_0(x), f_1(x))$. Hệ thống đa thức $f_0(x) = f(x), f_1(x) = f'(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ được gọi là *hệ thống hàm Stuyếc* đối với đa thức $f(x)$ đã cho. Đối với hệ thống này ta có *định lý Stuyếc*: Nếu $f(x)$ là một đa thức không có nhân tử bội và a, b $(a < b)$ là những số thực không nghiệm $f(x)$, thì số các nghiệm thực của $f(x)$ trong đoạn $[a, b]$ bằng số biến dấu mất đi trong hệ thống hàm Stuyếc của $f(x)$ khi đi từ a đến b.

Đôi khi có thể dùng *định lý Đề-các*: Số các nghiệm dương của một đa thức bằng hay nhỏ hơn một số chẵn lần số

lần biến dấu trong dãy hệ số của nó (mỗi nghiệm được tính một số lần bằng số bội của nó).

Sau khi tách các nghiệm (thường là sai khác một đơn vị) ta có thể dùng các phương pháp *tính gần đúng* các nghiệm với độ chính xác tùy ý (phương pháp Hoocne — Ruphini, phương pháp Niutơn, phương pháp nội suy tuyến tính).

Vấn đề tìm nghiệm bội và nhân tử bội chỉ đặt ra đối với các đa thức với hệ số bằng số. Ta thường dùng định lý : Nếu $p(x)$ là một nhân tử bất khả quy bội k của đa thức $f(x)$, $k \geq 1$, thì nó là một nhân tử bội $k - 1$ của $f'(x)$. Đặc biệt một nhân tử đơn thì không có mặt trong dạng phân tích của đạo hàm của nó. Vì vậy muốn cho một đa thức không có nhân tử bội, ắt có và đủ là nó nguyên tố với đạo hàm của nó.

Để tìm các nhân tử bội, chỉ cần dùng thuật tính Ơclit, phép lấy đạo hàm, phép chia đa thức, theo thuật tính sau :

Giả sử đã cho một đa thức $f(x)$ dưới dạng chính tắc. Ký hiệu X_i là tích tất cả các nhân tử bất khả quy bội i của $f(x)$ và giả sử m là bội lớn nhất của các nhân tử của $f(x)$, tức là $f(x) = a_0 X_1 X_2^2 \dots X_m^m$. Cách tìm các X_i, $i = 1, \dots, m$ như sau :

Trước hết, tính $D(x) = (f(x), f'(x))$, $D_1(x) = (D(x), D'(x))$, $D_2(x) = (D_1(x), D_1'(x))$, ..., $D_{m-1}(x) = (D_{m-2}(x), D'_{m-2}(x)) = 1$ (đến lúc gặp số 1 thì dừng lại). Tiếp đó, tính :

$$E_1 = \frac{f(x)}{D(x)}, \; E_2 = \frac{D(x)}{D_1(x)}, \dots, E_m = \frac{D_{m-2}(x)}{D_{m-1}(x)}.$$

Cuối cùng ta sẽ được :

$$\frac{E_1}{E_2} = a_0 X_1, \; \frac{E_2}{E_3} = X_2, \dots, \frac{E_{m-1}}{E_m} = X_{m-1}, \; E_m = X_m.$$

Giả sử đã cho một đa thức một ẩn $f(x)$ bậc n trên trường P

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n.$$

Ký hiệu $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là các nghiệm của $f(x)$ trong một trường phân tích của $f(x)$, mỗi nghiệm kể một số lần bằng số bội của nó. Thế thì các nghiệm và các hệ tử của $f(x)$ liên hệ với nhau bởi các công thức

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \dots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_2}{a_0},$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \dots + \alpha_1\alpha_2\alpha_n + \dots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = -\frac{a_3}{a_0},$$

. . . .

$$\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

Giả sử R là một vành giao hoán với đơn vị và không có ước của không. Ta gọi là *đa thức đối xứng* trên vành R, mọi đa thức $f(x_1, \dots, x_n)$ của n ẩn trên R mà không thay đổi khi ta hoán vị các ẩn một cách tùy ý. Các đa thức sau được gọi là các *đa thức đối xứng cơ bản* của n ẩn $x_1, x_2, \dots, x_n$.

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + \dots + x_1x_n + \dots + x_{n-1}x_n,$$

$$\sigma_3 = x_1x_2x_3 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n,$$

. . . .

$$\sigma_n = x_1x_2 \dots x_n$$

Ta có *định lý cơ bản* về đa thức đối xứng: Mọi đa thức đối xứng của n ẩn trên vành R đều có thể biểu thị được dưới dạng đa thức của các đa thức đối xứng cũng trên vành R.

Phương pháp biểu diễn như sau: giả sử đã cho đa thức đối xứng của n ẩn $f(x_1, \dots, x_n) = \varphi(x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n})$ trong đó $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ là hạng tử cao nhất ($k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$). Ta tiến hành các bước:

1) Chọn các hệ thống số mũ: mỗi hệ thống gồm n số nguyên không âm (có thể có một số số 0) thỏa mãn các điều kiện: tổng các số của mỗi hệ thống đều bằng bậc của đa thức, tức là bằng $k_1 + k_2 + \dots + k_n$; các số trong mỗi hệ thống xếp theo thứ tự không tăng; hệ thống sau thấp hơn hệ thống trước theo nghĩa «từ điển».

2) Lấy tổng các tích đa thức đối xứng cơ bản ứng với từng hệ thống số mũ. Ví dụ ứng với hệ thống số mũ $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ ta viết hạng tử $A_1 \sigma_1^{k_1 - k_2} \sigma_2^{k_2 - k_3} \dots \sigma_{n-1}^{k_{n-1} - k_n} \times \sigma_n$, với hệ số A_1 phải tìm.

3) Dùng phương pháp hệ số bất định để tính các hệ số A_i của các hạng tử trên.

Có sự liên hệ chặt chẽ giữa các đa thức đối xứng và định lý Viète như các bài tập sẽ chỉ rõ.

§1. CÁC THUẬT TOÁN VỀ ĐA THỨC

455. a) Cho $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$. Tính $f(4)$.

b) Cho $f(x) = x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7$. Tính $f(-2 - i)$.

c) Cho $f(x) = ij^2 + 2j^2x^3 + ix^2 - 2jx + ij$, trong đó $1, j, j^2$ là các căn bậc ba của đơn vị. Tính $f(i)$, $f(j)$, $f(ij)$.

456. Thực hiện phép chia theo lũy thừa lùi :

a) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ chia cho $x - 1$.

b) $2x^5 - 5x^3 - 8x$ chia cho $x + 3$.

c) $4x^3 + x^2$ chia cho $x + 1 + i$.

d) $x^3 - x^2 - x$ chia cho $x - 1 + 2i$.

e) $x^4 + ix^3 - ix^2 + x + 1$ chia cho $x^2 - ix + 1$.

f) $x^5 + x^4\sqrt{2} - 2x^3 - (3\sqrt{2} + 1)x^2 - (\sqrt{2} + 3)x - 1$ chia cho $x^2 + x\sqrt{2} + 1$.

g) $x^4 - 4(1 + i)x^3 + 12ix^2 + 8(1 - i) - 5$ chia cho $x^2 - (1 + i)x + i$.

h) $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2$ chia cho $x^2 + (1 - i)x + 1 + i$.

457. a) Thực hiện phép chia theo lũy thừa lùi của $x^4 \sin a - x \sin 4a + \sin 3a$ chia cho $x^2 - 2x\cos a + 1$ (a là một số thực cho trước).

b) Tìm dư trong phép chia theo lũy thừa lùi của đa thức $(\cos a + x\sin a)^n$ chia cho $x^2 + 1$.
(a là một số thực cho trước).

458. Dùng sơ đồ Hoocne hoặc dùng khai triển Taylo để :

a) phân tích $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ theo lũy thừa của $x + 1$;

b) phân tích $f(x) = x^5$ theo lũy thừa của $x - 1$;

c) phân tích $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90$ theo lũy thừa của $x - 2$.

d) Cho $f(x) = x^4 - x^3 + 1$, viết $f(x + 3)$ theo lũy thừa của x.

e) Viết $(x - 2)^4 + 4(x - 2)^3 + 6(x - 2)^2 + 10(x - 2) + 20$ theo lũy thừa của x.

f) Phân tích $\dfrac{x^3 - x + 1}{(x - 2)^5}$ thành phân thức đơn giản.

g) Phân tích $\dfrac{x^4 - 2x^2 + 3}{(x + 1)^5}$ thành phân thức đơn giản.

459. a) Tính $(-\bar{2}x^2 + \bar{4}x + \bar{3})^2$ trong vành đa thức $Z/5Z[x]$.

b) Tính $(\bar{2}x^3 + \bar{4}x^2 + \bar{1}x)(\bar{3}x^2 + \bar{3}x + \bar{2})$ trong vành đa thức $Z/6Z[x]$. Vành này có ước của không hay không? Cho ví dụ.

c) Trong vành $Z/5Z[x]$, thực hiện phép chia :

$$f(x) = -\bar{1}x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{1}$$

cho
$$g(x) = -\bar{2}x^2 + \bar{2}x - \bar{1}.$$

460. Thực hiện phép chia theo lũy thừa tiến của :

a°) $1 + ix - x^2 + ix^3$ chia cho $1 - ix$ đến cấp 2 :

b) $1 + jx + j^2x^2$ chia cho $1 + j^2x + jx^2$ đến cấp 2 ($1, j, j^2$ là các căn bậc ba của đơn vị) ;

c) 1 chia cho $1 - x$ đến cấp n ;

d) $1 + x$ chia cho $1 + x^2$ đến cấp 5 ;

e) $\cos\alpha - x$ chia cho $1 - 2x\cos\alpha + x^2$ đến cấp 3 (α là một số thực cho trước).

461. Chứng minh rằng :

a) $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ chia hết cho $x^2 + x + 1$.

b) $x^{ka_1} + x^{ka_2+1} + \ldots + x^{ka_k+k-1}$ chia hết cho $+ x^{k-1} + x^{k-2} \ldots + 1$.

c) $x^4 + 2ix^3 + jx^2 - 2ij^2x + j^2$ chia hết cho $x - j$, cho $x + i$ và cho $(x - j)(x + i)$, trong đó $1, j, j^2$ là các căn bậc ba của đơn vị.

462. a) Khi nào thì đa thức $x^{3m} - x^{3n+1} + x^{3p+2}$ chia hết cho $x^2 - x + 1$?

b) Khi nào thì $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ chia hết cho $x^4 + x^2 + 1$?

c) Tìm điều kiện để $f(x) = x^{2n} + x^n + 1$ chia hết cho
$$g(x) = x^2 + x + 1?$$

d) Với những giá trị nào của m thì $f(x) = (x + 1)^m - x^m - 1$ chia hết cho $g(x) = x^2 + x + 1$?

e) Với những giá trị nào của m thì $f(x) = (x + 1)^m + x^m + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$?

463. a) Với giá trị nào của m thì $(x + 1)^m - x^m - 1$ chia hết cho $(x^2 + x + 1)^2$?

b) Tìm điều kiện để $f(x) = (x + 1)^m + x^m + 1$ chia hết cho $(x^2 + x + 1)^2$.

c) Các đa thức $(x + 1)^m + x^m + 1$ và $(x + 1)^m - x^m - 1$ có chia hết cho $(x^2 + x + 1)^3$ không?

464. Chứng minh rằng:

a) Nếu $f(x^n)$ chia hết cho $x - 1$ thì nó chia hết cho $x^n - 1$.

b) Nếu $f(x^n)$ chia hết cho $(x - a)^k$ thì nó chia hết cho $(x^n - a^n)^k$, với $a \neq 0$.

c) Nếu $f(x) = f_1(x^3) + xf_2(x^3)$ chia hết cho $x^2 + x + 1$ thì $f_1(x)$ và $f_2(x)$ chia hết cho $x + 1$.

465. Tìm ước chung lớn nhất của các đa thức;

a) $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ và $x^3 + x^2 - x - 1$;

b) $x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1$ và
$3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 2$;

c) $x^6 - 7x^4 + 8x^3 - 7x^2 + x$ và $3x^5 - 7x^3 + 5x^2 - 7$;

d) $x^5 - 2x^4 + x^3 + 7x^2 - 12x + 10$ và
$3x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 2x - 2$;

e) $x^6 + 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x - 5$ và
$x^5 + x^2 - x + 1$;

f) $x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 52x^2 - 52x - 12$ và
$x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 22x - 12$;

g) $x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ và
$x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1$;

h) $x^4 - 10x^2 + 1$ và $x^4 - 4\sqrt{2}\,x^3 + 6x^2 + 4\sqrt{2}x + 1$;

i) $x^4 + 7x^3 + 19x^2 + 23x + 10$ và
$x^4 + 7x + 18x^2 + 22x + 12$;

j) $x^4 - 4x^3 + 1$ và $x^3 - 3x^2 + 1$;

k) $2x^6 - 5x^5 - 14x^4 + 36x^3 + 86x^2 + 12x - 31$ và
$2x^5 - 9x^4 + 2x^3 + 37x^2 + 10x - 14$.

466. Tìm UCLN của các đa thức:

a) $(x-1)^3(x+2)^2(x-3)(x-4)$ và
$(x-1)^2(x+2)(x+5)$;

b) $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$ và
$(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$;

c) $(x^3-1)(x^2-2x+1)$ và $(x^2-1)^3$;

d) $x^n - 1$ và $x^m - 1$;

e) $x^m + a^m$ và $x^n + a^n$;

f) $f(x) = (x-1)^3(x+1)^2(x-3)$ và $f'(x)$;

g) $f(x) = (x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$ và $f'(x)$;

h) $f(x) = x^{m+n} - x^m - x^n + 1$ và $f'(x)$.

467. Dùng phương pháp hệ số bất định hoặc dùng thuật tính Ơclit tìm các đa thức $M_1(x)$ và $M_2(x)$ sao cho $f_1(x)M_2(x) + f_2(x)M_1(x) = 1$, với

a) $f_1(x) = x^4 - 4x^3 + 1$, $f_2(x) = x^3 - 3x^2 + 1$;

b) $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = (1-x)^2$;

c) $f_1(x) = x^4$, $f_2(x) = (1-x)^4$;

d) $f_1(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$, $f_2(x) = x^2 - x + 1$;

e) $f_1(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$;
$f_2(x) = x^2 - x - 1$;

f) $f_1(x) = x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 2x + 12$,
$f_2(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 17$.

468. Dùng thuật tính Ơclit, tìm các đa thức $M_1(x)$, $M_2(x)$ sao cho $f_1(x) M_2(x) + f_2(x) M_1(x) = d(x)$, trong đó $d(x)$ là ƯCLN của $f_1(x)$ và $f_2(x)$, với

a) $f_1(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$,
$f_2(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$;

b) $f_1(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1$,
$f_2(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2$;

c) $f_1(x) = x^6 - 4x^5 + 11x^4 - 27x^3 + 37x^2 - 35x + 35$,
$f_2(x) = x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 20x^2 + 10x - 25$;

d) $f_1(x) = 3x^7 + 6x^6 - 3x^5 + 4x^4 + 14x^3 - 6x^2 - 4x + 4$, $f_2(x) = 3x^6 - 3x^4 + 7x^3 - 6x + 2$;

e) $f_1(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9$,
$f_2(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$.

469. Tìm đa thức bậc bé nhất sao cho

a) Chia cho $(x - 1)^2$ còn dư $2x$ và chia cho $(x - 2)^3$ còn dư $3x$.

b) Chia cho $x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 10x - 7$ còn dư $x^2 + x + 1$ và chia cho $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 13x - 10$ còn dư $2x^2 - 3$.

§2. ĐA THỨC TRÊN CÁC TRƯỜNG SỐ

470. Thành lập đa thức $f(x)$ theo bảng giá trị sau đây, bằng cách dùng công thức Lagorăng:

a)

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	1	4	3

b)

x	1	ε_1	ε_2	$\ldots$	ε_{n-1}
$f(x)$	1	2	3	$\ldots$	n

$$\varepsilon_k = -\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

c) Đa thức $f(x)$ có bậc không quá $n - 1$, có giá trị là $y_1, y_2, \ldots, y_n$ tại các giá trị của căn bậc n của đơn vị. Tìm $f(0)$.

d) Chứng minh rằng nếu các nghiệm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ của đa thức φ_n đều khác nhau, thì

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^s}{\varphi'(x_i)} = 0$$

với $0 \leqslant s \leqslant n-2$; $\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$.

e) Ký hiệu, như câu trên, tìm tổng

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{n-1}}{\varphi'(x_i)}.$$

471. Chứng minh rằng các nghiệm của đa thức $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ với hệ số thực hoặc phức, về môđun không vượt quá

a) $1 + \max\left|\dfrac{a_k}{a_0}\right|$, $k = 1, 2, \ldots, n$;

b) $\rho + \max\left|\dfrac{a_k}{a_0\rho^{k-1}}\right|$, $k = 1, 2, \ldots, n$, ρ là một số dương nào đó,

c) $2\max \sqrt[k]{\left|\dfrac{a_k}{a_0}\right|}$, $k = 1, 2, \ldots, n$;

d) $\left|\dfrac{a_1}{a_0}\right| + \max \sqrt[k-1]{\left|\dfrac{a_k}{a_n}\right|}$, $k = 2, 3, \ldots, n$.

e) Chứng minh rằng nếu tất cả các hệ số của $f(x)$ không âm thì đa thức không có nghiệm dương.

472. Tìm cận trên và cận dưới các nghiệm thực của đa thức sau bằng cách áp dụng định lý Niutơn:

a) $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 8x + 3$;

b) $x^5 + 7x^3 - 3$;

c) $x^7 - 108x^5 - 445x^3 + 900x^2 + 801$;

d) $x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 10x + 4$

473. Lập hệ thống hàm Stuyếc và tách các nghiệm thực của các đa thức:

a) $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 5x + 5$;

b) $x^3 + x^2 - 2x - 1$;

c) $x^3 - 7x + 7$;

d) $x^3 + 3x - 5$;

e) $x^4 - 12x^2 - 16x - 4$;

f) $x^4 - x - 1$;

g) $2x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 1$;

h) $x^4 + x^2 - 1$;

i) $x^4 + 4x^3 - 12x + 9$;

k) $x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1$;

l) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1$;

m) $x^4 - x^3 + x^2 - x - 1$;

n) $x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 4x + 1$.

474. a) Tính gần đúng các nghiệm thực của phương trình

$$x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 1 = 0 \text{ sai kém } 0{,}0001.$$

b) Tính gần đúng các nghiệm thực của đa thức

$$x^5 - 2x - 5 \text{ với độ chính các } 0{,}000001.$$

c) Tính gần đúng với độ chính xác 0,0001 các nghiệm của đa thức

$$x^3 - 10x - 5.$$

d) Như trên, với đa thức $x^3 + 2x - 30$.

e) Như trên, với đa thức $x^3 - 3x^3 - 4x + 1$.

f) Như trên, với đa thức $x^3 - 3x^2 - x + 2$.

475. Giải các phương trình bậc ba sau đây :

a) $x^3 - 6x + 9 = 0$;

b) $x^3 + 12x + 63 = 0$;

c) $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$;

d) $x^3 + 6x^2 + 30x + 25 = 0$;

e) $x^3 - 6x + 4 = 0$;

f) $x^3 + 6x + 2 = 0$;

g) $x^3 + 18x + 15 = 0$;

h) $x^3 - 3x^2 - 3x + 11 = 0$;

i) $x^3 + 3x^2 - 6x + 4 = 0$;

k) $x^3 + 9x - 26 = 0$;

l) $x^3 + 24x - 56 = 0$;

m) $x^3 + 45x - 98 = 0$.

n) Chứng minh rằng

$(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2 = -4p^3 - 27q^2$, nếu x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình $x^3 + pq + q = 0$.

476. Giải các phương trình bậc bốn sau :

a) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$;

b) $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6x - 15 = 0$;

c) $x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$;

d) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$;

e) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 4x - 6 = 0$;

f) $x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 27x - 56 = 0$;

g) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = 0$;

h) $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 10 = 0$.

477. Tìm nghiệm hữu tỷ của các đa thức:

a) $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$;

b) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$;

c) $x^5 - 7x^3 - 12x^2 + 6x + 36$;

d) $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$;

e) $24x^4 - 42x^3 - 77x^2 + 56x + 60$;

f) $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$;

g) $10x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24$;

h) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 38x - 24$;

i) $2x^3 + 3x^2 + 6x - 4$;

k) $4x^4 - 7x^2 - 5x - 1$.

478. Chứng minh rằng:

a) Đa thức $f(x) \in Z[x]$ không có nghiệm nguyên $f(0)$ và $f(1)$ là số lẻ.

b) Nếu phân số tối giản $\frac{p}{q}$ là nghiệm của đa thức $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \in Z[x]$ thì $p - mq$ là ước của $f(m)$ với m nguyên. Đặc biệt, $p - q$ là ước của $f(1)$, $p + q$ là ước của $f(-1)$.

479. Phân tích thành nhân tử bậc nhất:

a) $x^3 - 6x^2 + 11 - 6$;

b) $x^4 + 4$;

c) $x^4 - 10x^2 + 1$;

d) $\cos(n.\arccos x)$.

480. Phân tích thành nhân tử trên trường số thực:

a) $x^4 + 4$;

b) $x^6 + 27$;

c) $x^4 - ax^2 + 1$ với $-2 < a < 2$;

d) $x^4 + x^2y^2 + y^4$;

e) $S = a^6 - b^4 + a^4 - a^2b^2 + b^4$;

f) $Q = (x+y)^4 + x^4 + y^4$;

g) $P(x) = (x+y)^5 - x^5 - y^5$;

h) $P(a, b, c) = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$.

481. Phân tích thành nhân tử trên trường số thực:

a) $f(x) = x^{2n} - 1$.

b) $f(x) = x^{2n} - 2x^n + 2$.

c) $f(x) = x^{2n} + x^n + 1$.

d) $Q = bc(b+c) + ca(c-a) - ab(a+b)$.

e) $P(a, b, c) = (b-c)(b+c)^4 + (c-a)(c+a)^4 +$
$+ (a-b)(a+b)^4$.

482. Tìm các đa thức bậc bé nhất với các nghiệm sau:

a) Nghiệm kép 1, nghiệm đơn 2, 3 và $1+i$, với hệ số phức và thực.

b) Nghiệm bội ba là -1, các nghiệm đơn là 3 và 4.

c) Nghiệm kép i, nghiệm đơn $-1-i$.

d) Nghiệm bội ba là $2-3i$, với hệ số thực.

e) Nghiệm kép i, nghiệm đơn $-1-i$ với hệ số thực.

f) Nghiệm là tất cả các căn của đơn vị, bậc của các căn này không vượt quá n.

483. Chứng minh tính bất khả quy của các đa thức sau trên trường số hữu tỷ:

a) $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$;

b) $x^5 - 12x^3 + 36x - 12$;

c) $x^4 - x^3 + 2x + 1$;

d) $X_p(x) = \dfrac{x^p - 1}{x - 1}$, p là số nguyên tố (đa thức chia vòng tròn);

e) $X_{p^k}(x) = \dfrac{x^{p^k} - 1}{x^{p^{k-1}} - 1}$, p là số nguyên tố.

484. a) Chứng minh rằng một đa thức bậc ba không có nghiệm hữu tỷ thì bất khả quy trên trường số hữu tỷ.

b) Cho $f(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên và có một số nguyên tố p sao cho a_0 không chia hết cho p, a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_n chia hết cho p và a_n không chia hết cho p^2. Chứng minh rằng $f(x)$ có một nhân tử bất khả quy không nhỏ hơn $n - k$.

485. Phân tích thành nhân tử hoặc chứng minh tính chất bất khả quy của các đa thức trên $Q[x]$ sau :

a) $x^4 - 3x^2 + 1$;

b) $x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 5x + 1$;

c) $x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1$;

d) $x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 2$;

e) $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n) - 1$,

trong đó $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số nguyên phân biệt ;

f) $f(x) = (x - a_1)^2 (x - a_2)^2 \ldots (x - a_n)^2 + 1$,

trong đó $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số nguyên phân biệt.

486. a) Chứng minh rằng một đa thức không có nghiệm nguyên $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbf{Z}[x]$ nếu phân tích được thì các nhân tử phải có dạng

$$x^2 + \frac{c - am}{n - m}x + m, \text{ trong đó } mn = d, m \neq n.$$

Dựa vào đó, phân tích thành nhân tử hoặc chứng minh tính chất bất khả quy của các đa thức sau trên trường hữu tỷ :

b) $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x - 9$;

c) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 6$;

d) $x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 23x - 12$.

487. Chứng minh rằng:

a) Nếu đa thức $f(x) \in Z[x]$ bằng 1 tại quá ba giá trị nguyên của ẩn thì nó không thể bằng -1 tại mọi giá trị nguyên của ẩn.

b) Một đa thức $f(x) \in Z(x)$ bậc n bằng ± 1 tại quá $\frac{n}{2}$ giá trị nguyên của x, là bất khả quy khi $n > 12$.

488. a) Xác định a sao cho đa thức $x^5 - ax^2 - ax + 1$ nhận số -1 làm nghiệm bội không dưới 2.

b) Xác định A và B sao cho $Ax^4 + Bx^3 + 1$ chia hết cho $(x-1)^2$.

c) Xác định A và B sao cho $Ax^{n+1} + Bx^n + 1$ chia hết cho $(x-1)^2$.

489. Tìm số bội của nghiệm 1 của các đa thức sau:

a) $x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$;

b) $x^{2n+1} - (2n+1)x^{n+1} + (2n+1)x^n - 1$;

c) $(n-2m)x^n - nx^{n-m} + nx^m - (n-2m)$;

d) $$f(x) = x^{2n+1} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}x^{n+2} + \frac{(n-1)(n+2)(2n+1)}{2}x^{n+1} - \frac{(n-1)(n+2)(2n+1)}{2}x^n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}x^{n-1} - 1.$$

490. a) Tìm điều kiện để đa thức $x^5 + ax^3 + b$ có nghiệm kép khác không.

b) Tìm điều kiện để đa thức $x^5 + 10ax^3 + 5bx + c$ có nghiệm bội ba khác không.

c) Chứng minh rằng đa thức $x^n + ax^{n-m} + b$ không có nghiệm khác không, bội cao hơn 2.

d) Tìm điều kiện để $f(x) = x^n + ax^{n-m} + b$ có nghiệm kép khác không.

491. a) Tìm bội số của nghiệm a của đa thức

$$F(x) = \frac{x-a}{2}[f'(x) + f'(a) - f(x) + f(a)].$$

b) Tìm nghiệm bội khác không của đa thức

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

492. a) Chứng minh rằng $\cos\frac{2\pi}{n}$ là nghiệm của một phương trình có dạng

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = 0$$

với n là một số tự nhiên. Tính a_0, a_2 và a_3.

b) Tìm những nghiệm khác của phương trình $P(x) = 0$.

c) Tính các biểu thức

$$S = 1 + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + ... + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n},$$

$$P = \cos\frac{2\pi}{n}\cos\frac{4\pi}{n} ... \cos\frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

493. a) Xác định các số a và b để cho đa thức

$$P(x) = ax^{n+1} + bx^n + 1.$$

có nghiệm kép $x = 1$. Khi đó thương của $P(x)$ chia cho $(x-1)^2$ bằng bao nhiêu?

b) Chứng minh rằng đa thức

$$P(x) = (1 - x^n)(1 + x) - 2nx^n(1 - x) - n^2x^n(1 - x)^2$$

chia hết cho $(1 - x)^3$ (n nguyên $\geqslant 2$).

c) Xác định một đa thức bậc ba $P(x)$ sao cho

$$P(x + 1) - P(x - 1) = x^2 - 1.$$

494. Tìm nhân tử bội của các đa thức sau trên trường số thực

a) $x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$;

b) $x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4$;

c) $x^6 - 15x^4 + 8x^3 + 51x^2 - 72x + 27$;

d) $x^5 - 6x^4 + 16x^3 - 24x^2 + 20x - 8$;

e) $x^6 - 2x^5 - x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4$;

f) $x^7 - 3x^6 + 5x^5 - 7x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 3x - 1$;

g) $x^8 + 2x^7 + 5x^6 + 6x^5 + 8x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 2x + 1$

§. 3. ĐỊNH LÝ VIÉT. ĐA THỨC ĐỐI XỨNG

495. a) Tìm hệ thức giữa các hệ số của phương trình bậc ba

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

biết rằng một nghiệm bằng tổng hai nghiệm kia.

b) Áp dụng : thử rằng phương trình

$$36x^3 - 12x^2 - 5x + 1 = 0$$

có một nghiệm bằng tổng hai nghiệm kia và giải phương trình đó.

496. a) Tìm hệ thức giữa các hệ số của phương trình

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

mà tổng hai nghiệm nào đó bằng tổng hai nghiệm kia.

b) Chứng minh rằng một phương trình thỏa mãn các điều kiện của câu trên có thể đưa về phương trình trùng phương bằng cách đặt $x = y + \alpha$, với α chọn sao cho thích hợp.

c) Tìm hệ thức giữa các hệ số của phương trình

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

mà tích hai nghiệm nào đó bằng tích hai nghiệm kia.

d) Chứng minh rằng phương trình thỏa mãn điều kiện trên có thể giải được bằng cách chia cho x^2 và đặt $y = x + \frac{c}{ax}$ (với $a \neq 0$).

Áp dụng : Giải các phương trình bậc bốn sau :

e) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 6 = 0$;

f) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x + 25 = 0$;

g) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x + 2x - 3 = 0$

h) $x^4 + x^3 + 10x^2 - 2x + 4 = 0$

497. a) Xác định λ để một trong các nghiệm của phương trình $x^3 - 7x + \lambda = 0$ gấp đôi một nghiệm kia.

b) Xác định a, b, c để chúng là nghiệm của phương trình

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$

c) Xác định a, b, c để chúng là nghiệm của phương trình

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

d) Xác định λ để tổng hai nghiệm của phương trình

$$2x^3 - x^2 - 7x + \lambda = 0 \text{ bằng } 1.$$

e) Tìm hệ thức giữa các hệ số của phương trình

$$x^3 + px + q = 0 \text{ nếu } x_3 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

f) Các nghiệm của phương trình

$$8x^3 - 12x^2 - 2x + 3 = 0$$

có lập thành một cấp số cộng không ?

498. Biểu thị các đa thức đối xứng sau đây qua các đa thức đối xứng cơ bản :

a) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$;

b) $x_1^2 x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2$;

c) $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_2^2x_3^2 - 2x_3^2x_1^2$;

d) $x_1^5x_2^2 + x_1^2x_2^5 + x_1^5x_3^2 + x_1^2x_3^5 + x_2^5x_3^2 + x_2^2x_3^5$;

e) $\varphi(x_1^2)$;

f) $\varphi(x_1^3)$;

g) $\varphi(x_1^2x_2x_3)$;

h) $\varphi(x_1^2x_2^2)$;

i) $\varphi(x_1^3x_2)$;

k) $\varphi(x_1^4)$.

499. Biểu thị qua các đa thức đối xứng cơ bản :

a) $\varphi(x_1^2x_2^2x_3)$;

b) $\varphi(x_1^3x_2x_3)$;

c) $\varphi(x_1^2 x_2^2)$;

d) $\varphi(x_1^4 x_2)$;

e) $\varphi(x_1^5)$;

f) $\varphi(x_1^2 x_2^2 x_3 x_4)$;

g) $\varphi(x_1^2 x_2^2 x_3^2)$;

h) $\varphi(x_1^3 x_2 x_3 x_4)$;

i) $\varphi(x_1^3 x_2^2 x_3)$;

k) $\varphi(x_1^3 x_2^3)$;

l) $\varphi(x_1^4 x_2 x_3)$;

m) $\varphi(x_1^4 x_2^2)$;

n) $\varphi(x_1^5 x_3)$;

o) $\varphi(x_1^6)$.

500. Biểu thị qua các đa thức đối xứng cơ bản :

a) $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)$;

b) $(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_3^2)$;

c) $(2x_1 - x_2 - x_3)(2x_2 - x_1 - x_3)(2x_3 - x_1 - x_2)$;

d) $(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2$;

e) $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)(x_2 + x_4) \times$
$\times (x_3 + x_4)$;

f) $(x_1 x_2 + x_3 x_4)(x_1 x_3 + x_2 x_4)(x_1 x_4 + x_2 x_3)$;

g) $(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 -$
$- x_3 + x_4)$.

501. Biểu thị qua các đa thức đối xứng cơ bản:

a) $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_3} + \dfrac{x_3}{x_1} + \dfrac{x_2}{x_1} + \dfrac{x_3}{x_2} + \dfrac{x_1}{x_3}$;

b) $\dfrac{(x_1 - x_2)^2}{x_1 + x_2} + \dfrac{(x_2 - x_3)^2}{x_2 + x_3} + \dfrac{(x_3 - x_1)^2}{x_3 + x_1}$;

c) $\left(\dfrac{x_2}{x_1} + \dfrac{x_3}{x_2} + \dfrac{x_1}{x_3}\right)\left(\dfrac{x_1}{x_3} + \dfrac{x_2}{x_3} + \dfrac{x_3}{x_1}\right)$

d) $\dfrac{x_1 x_2}{x_3 x_4} + \dfrac{x_1 x_3}{x_2 x_4} + \dfrac{x_1 x_4}{x_2 x_3} + \dfrac{x_2 x_3}{x_1 x_4} + \dfrac{x_2 x_4}{x_1 x_3} + \dfrac{x_3 x_4}{x_1 x_2}$;

e) $\dfrac{x_1 + x_2}{x_3 + x_4} + \dfrac{x_1 + x_3}{x_2 + x_4} + \dfrac{x_1 + x_4}{x_2 + x_3} + \dfrac{x_2 + x_3}{x_1 + x_4} +$

$$+ \dfrac{x_2 + x_4}{x_1 + x_3} + \dfrac{x_3 + x_4}{x_1 + x_2};$$

f) $\sum \dfrac{1}{x_i}$;

g) $\sum \dfrac{1}{x_i^2}$;

h) $\sum\limits_{i \neq j} \dfrac{x_i}{x_j}$

502. a) Tính tổng bình phương các nghiệm của phương trình

$$x^3 + 2x - 3 = 0.$$

b) Tính $\varphi(x_1^3 x_2)$, trong đó x_1, x_2, x_3 là các nghiệm của phương trình $x^3 - x^2 - 4x + 1 = 0$.

c) Tính giá trị của hàm số đối xứng $\varphi(x_1^3 x_2 x_3)$, trong đó x_i là các nghiệm của phương trình

$$x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0.$$

d) Tính $\varphi(x_1^4 x_2)$ với x_i là nghiệm của $3x^3 - 5x^2 + 1$;

e) Tính $\varphi(x_1^3 x_2^3)$ với x_i là nghiệm của đa thức

$$f(x) = 3x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 2x + x - 1;$$

f) Tính

$$(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)(x_2^2 + x_2 x_3 + x_3^2)(x_3^2 + x_3 x_1 + x_1^2)$$

với x_i là nghiệm của $f(x) = 5x^3 - 6x^2 + 7x - 8$.

503. a) Tìm hệ thức giữa các hệ số của phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, nếu bình phương một trong các nghiệm bằng tổng bình phương hai nghiệm kia.

b) Tìm diện tích và bán kính vòng tròn ngoại tiếp của một tam giác mà các cạnh là các nghiệm của phương trình

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0.$$

c) Tìm hệ thức giữa các hệ số của một phương trình mà các nghiệm bằng sin các góc của một tam giác.

504. Dùng đa thức đối xứng, giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{5}{6}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = -1; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = -2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = -8 \\ xyz = 2; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 7 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 27 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{9}. \end{cases}$

505. a) Chứng minh rằng nếu $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là một đa thức đối xứng có tính chất

$$F(x_1 + a, x_2 + a, \ldots, x_n + a) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

và nếu $\Phi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ là biểu thức của nó qua các đa thức đối xứng cơ bản thì

$$n\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_1} + (n-1)\sigma_1\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_2} + \ldots + \sigma_{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_n} = 0$$

và ngược lại.

b) Chứng minh rằng mỗi đa thức đối xứng đẳng cấp bậc hai có tính chất như trong câu trên đều bằng

$$c\sum_{i<k}(x_i - x_k)^2,$$

trong đó c là một hằng số.

c) Tìm dạng tổng quát của các đa thức đối xứng bậc ba có tính chất như trong hai câu trên.

PHẦN BÀI GIẢI

CHƯƠNG I

TẬP HỢP

1. a) Giả sử $x \in A \cap (B \cup C)$. Thế thì $x \in A$ và $x \in B \cup C$. Nếu $x \in A$ và $x \in B$ thì $x \in A \cap B$, do đó $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Nếu $x \in A$ và $x \in C$ thì $x \in A \cap C$, do đó $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Vậy $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Đảo lại, giả sử $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Thế thì $x \in A \cap B$ hoặc $x \in A \cap C$. Nếu $x \in A \cap B$ thì $x \in A$ và $x \in B$, do đó $x \in A$ và $x \in B \cup C$, tức là $x \in A \cap (B \cup C)$.

Nếu $x \in A \cap C$ thì $x \in A$ và $x \in C$, do đó $x \in A$ và $x \in B \cup C$, tức là $x \in A \cap (B \cup C)$.

Vậy $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$.

b) Giả sử $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Thế thì $x \in A \cup B$ và $x \notin A \cap B$, từ đó suy ra $x \in A$ và $x \notin B$ hoặc $x \in B$ và $x \notin A$, nghĩa là $x \in A \setminus B$ hoặc $x \in B \setminus A$. Vậy $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Đảo lại, giả sử $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Thế thì $x \in A \setminus B$ hoặc $x \in B \setminus A$, nghĩa là $x \in A$ và $x \notin B$ hoặc $x \in B$ và $x \notin A$. Nếu $x \in A$ và $x \notin B$ thì $x \in A \cup B$ và $x \notin A \cap B$, do đó $x \in (A \cup B) \setminus$

$(A \cap B)$. Tương tự, nếu $x \in B$ và $x \notin A$ thì $x \in \ldots$ và $x \notin A \cap B$, do đó $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Vậy $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

2. b) Giả sử $x \in M \setminus (A \cap B)$. Thế thì $x \in M$ và $x \notin A \cap B$, do đó $x \notin M$ và $x \notin A$ hoặc $x \in M$ và $x \notin B$, tức là $x \in M \setminus A$ hoặc $x \in M \setminus B$. Vậy $x \in (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$.

Đảo lại, giả $x \in (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$. Thế thì $x \in M$ và $x \notin A$, hoặc $x \in M$ và $x \notin B$. Nếu $x \in M$ và $x \notin A$ thì $x \in M$ và $x \in A \cap B$, do đó $x \in M \setminus (A \cap B)$ Tương tự, nếu $x \in M$ và $x \notin B$ thì $x \in M$ và $x \notin A \cap B$, nghĩa là $x \in M \setminus (A \cap B)$.

d) Giả sử $B' \subset A$ và $x \in A'$. Thế thì $x \in M$ và $x \notin A$, do đó $x \notin B'$. Vậy $x \in B$, tức là $A' \subset B$. Do tính đối xứng, ta cũng có $A' \subset B$ kéo theo $B' \subset A$.

f) Giả sử $x \in (A \setminus B)'$. Thế thì $x \in M$ và $x \notin \ \setminus B$, nghĩa là $x \notin A$ hoặc $x \in B$. Do đó $x \in A' \cup (B \cap \ldots)$.

Đảo lại, giả sử $x \in A' \cup (B \cap A)$. Thế thì $x \in A'$ hoặc $x \in B \cap A$. Nếu $x \in A'$ thì $x \in (A \setminus B)'$. Nếu $x \in B \cap A$ thì $x \in B$, do đó $x \in A \setminus B$ hay $x \in (A \diagup B)'$.

g) Giả sử $x \in [(C \setminus A) \cap (C \setminus B)]'$. Thế thì $x \in (C \setminus A) \cup \cap (C \diagup B)$, nghĩa là $x \in C \setminus A$ hoặc $x \in C \setminus B$, từ đó suy ra $x \in C$ hoặc $x \in A$ hoặc $x \in B$. Vậy $x \in A \cup B \cup C$.

Đảo lại, giả sử $x \in A \cup B \cup B'$. Nếu $x \in A$ thì $x \notin C \setminus A$, do đó $x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$, hay $x \in [(C \setminus A) \cap \cap (C \setminus B)]$. Nếu $x \in B$ hoặc $x \in C'$ thì $x \notin C \setminus B$ và ta cũng có kết luận tương tự.

3. d) Nếu $E \setminus (E \setminus F) = F$ thì rõ ràng $F \subset E$. Đảo lại nếu $F \subset E$ thì với mọi $x \in F$ ta có $x \in E$ và $x \notin E \setminus F$ do đó $x \in E \setminus (E \setminus E)$. Vậy $F \subset E \setminus (E \setminus E)$. Mặt khác nếu $F \subset E$ và $y \in E \setminus (E \setminus F)$ thì $y \in E$ và $y \notin E \setminus F$. Vậy $y \in F$ nghĩa là $E / (E / F) \subset F$.

4. b) Giả sử $(x, y) \in (E \times F) \setminus (A \times B)$. Thế thì $(x, y) \in E \times F$ và $(x, y) \in A \times B$, do đó hoặc $x \notin A$ hoặc $y \notin B$. Vậy $(x, y) \in [(E \setminus A) \times F] \cup [E \times (F \setminus B)]$.

— Đảo lại, giả sử $(x, y) \in [(E \setminus A) \times F] \cup [E \times (F \setminus B)]$. Thế thì $(x, y) \in (E \notin A) \times F$ hoặc $(x, y) \in E \times (F \setminus B)$, nghĩa là $x \in E \setminus A$, $y \in F$ hoặc $x \in E$, $y \in F \setminus B$.

Trong cả hai trường hợp ta đều có $(x, y) \in (E \times F) \setminus (A \times B)$.

5. a) Theo định nghĩa :

$(A \odot B) \odot C = [[(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] \setminus C] \cup [C \setminus [(A \setminus B) \cup (B \setminus A)]]$.

$A \odot (B \odot C) = [A \setminus [(B \setminus C) \cup (C \setminus B)]] \cup [[(B \setminus C) \cup (C \setminus B)] \setminus A]$.

Giả sử $x \in (A \odot B) \odot C$. Thế thì

$x \in [(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] \setminus C$ hoặc $x \in C \setminus [(A \setminus B) \cup (B \setminus A)]$. Nếu $x \in [(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] \setminus C$ thì $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ và $x \notin C$, nghĩa là $x \in A \setminus B$ và $x \notin C$, hoặc $x \in B \setminus A$ và $x \notin C$). Trong trường hợp thứ nhất ta có $x \in A$, $x \in B$, $x \notin C$, do đó $x \notin A$ và $x \notin (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$. Vậy $x \in A \setminus [(B \setminus C)] \cup (C \setminus B)$ từ đó $x \in A \odot (B \odot C)$. Trong trường hợp thứ hai, $x \in B$, $x \notin A$, $x \notin C$, do đó $x \in (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$ và $x \in A$. Vậy $x \in [(B \setminus C) \cup (C \setminus B)] \setminus A$, từ đó $x \in A \odot (B \odot C)$. Tất cả các trường hợp còn lại cũng lý luận tương tự.

b) Lấy $E = \phi$ ta sẽ được $\phi \odot A = A$ với mọi $A \subset X$.

c) Với mỗi $A \subset X$ ta có $A \odot A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \phi$.

6. a) Số tập con của A có r phần tử, $0 \leqslant r \leqslant n$, chính là số tập tổ hợp chập r của n phần tử, tức là bằng

$$C_n^r = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{\ }.$$

25. Giả sử B là một tập con tùy ý của tập A. Ta chứng minh rằng B chứa phần tử bé nhất. Ký hiệu B_1 là tập con gồm các phần tử $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in B$ mà b_1 bé nhất $= c_1$. Lấy $B_2 \subset B_1$ gồm những phần tử $(c_1, b_2, \dots, b_n)$ mà b_2 bé nhất $= c_2$, ..., cuối cùng B_n là tập con của B_{n-1} gồm những phần tử mà thành phần thứ n bé nhất và bằng c_n. Rõ ràng B_n chỉ gồm một phần tử $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ và đó là phần tử bé nhất của tập B.

26. b) Vì $\sup B \geqslant c$ với mọi $c \in C$ nên theo định nghĩa $\sup C \leqslant \sup B$. Tương tự $\inf B \leqslant \inf C$.

c) Đặt $b = \sup B$ và $b_i = \sup B_i$, $i \in I$. Vì với mọi $x_i \in B_i$ ta có $x_i \leqslant b$ nên $b_i \leqslant b$ với mọi $i \in I$. Nếu $b_i \leqslant c$ với mọi $i \in I$ thì $x_i \leqslant c$ với mọi $i \in I$, do đó $x \leqslant c$ với mọi $x \in B$. Vì vậy $b \leqslant c$ và theo định nghĩa

$$\sup B = b = \sup \{b_i \mid i \in I\} = \sup \{\sup B_i \mid i \in I\}.$$

27. (a) $\Rightarrow$ (b). Giả sử thỏa mãn các giả thiết của điều kiện (b). Ta xét tập con B của tập A gồm tất cả các phần tử không có tính chất $\mathcal{C}$, và chứng minh $B = \phi$. Nếu $B \neq \phi$ thì theo điều kiện (a) B chứa một phần tử tối tiểu u. Theo giả thiết của điều kiện (b) phần tử u không thể là phần tử tối tiểu của tập A. Nếu $x < u$ thì $x \notin B$, do đó x có tính chất $\mathcal{C}$, nhưng lúc đó theo giả thiết của điều kiện (b) phần tử u phải có tính chất $\mathcal{C}$. Mâu thuẫn!

(b) $\Rightarrow$ (c). Ta nói phần tử $a \in A$ có tính chất $\mathcal{C}$ nếu mọi chuỗi giảm bắt đầu từ a bị ngắt đoạn, tức là thỏa mãn điều kiện (c). Trước hết mọi phần tử tối thiểu $u \in A$ đều có tính chất $\mathcal{C}$ đó vì không có phần tử nào bé hơn u và khác u. Nếu $a \in A$ là một phần tử sao cho mọi $x < a$ đều có tính chất $\mathcal{C}$, thì ta xét chuỗi

$$a = a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots$$

Nếu không phải mọi chỗ trong chuỗi đó đều có dấu bằng thì tồn tại một số i sao cho

$$a_1 = \dots = a_{i-1} \text{ và } a_{i-1} > a_i.$$

Nhưng lúc đó phần tử a_i có tính chất $\mathcal{T}$, nghĩa là chuỗi

$$a_i \geqslant a_{i+1} \geqslant \dots$$

bị ngắt đoạn, và do đó chuỗi

$$a_1 \geqslant \dots \geqslant a_i \geqslant a_{i+1} \geqslant \dots$$

cũng bị ngắt đoạn, tức là phần tử a có tính chất $\mathcal{T}$. Theo điều kiện (b) mọi phần tử của A đều có tính chất $\mathcal{T}$, nghĩa là A thỏa mãn điều kiện (c).

(c) $\Rightarrow$ (a). Giả sử có một tập con B của tập A không chứa phần tử tối tiểu. Chọn $a_1 \in B$ tùy ý, vì a_1 không tối tiểu nên có $a_2 \in B$ mà $a_1 > a_2$. Tương tự a_2 không tối tiểu nên có $a_3 \in B$ mà $a_2 > a_3$, ... nghĩa là ta có chuỗi vô hạn

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots$$

không thỏa mãn điều kiện (a).

28. *Từ bổ đề Zoóc suy ra tiên đề chọn.*

Giả sử đã cho một tập $M \neq \phi$ tùy ý. Ta cần xây dựng ánh xạ φ từ tập $\mathcal{M} = \mathcal{P}(M) \setminus \phi$ tới M sao cho với mọi $A \in \mathcal{M}$ ta có $\varphi(A) \in A$.

Ký hiệu Φ là tập các ánh xạ ψ từ một tập con nào đó của $\mathcal{M}$ tới M (tập con này gọi là *miền xác định* của ψ và ký hiệu là D_ψ) sao cho với mọi $B \in D_\psi$ ta có $\psi(B) \in B$. Vì $M \neq \phi$ nên $\Phi \neq \phi$.

Trong Φ ta lập quan hệ thứ tự $\leqslant$ như sau: với $\psi_1, \psi_2 \in \Phi$, $\psi_1 \leqslant \psi_2$ khi và chỉ khi $D_{\psi_1} \subset D_{\psi_2}$ và trên D_{ψ_1} thì ψ_1 và ψ_2 trùng nhau. Ta chứng tỏ trong Φ mọi tập con sắp thứ tự toàn phần Γ có cận trên.

Ta xây dựng ánh xạ φ_0 thỏa mãn hai điều kiện :

1) $D_{\varphi_0} = \bigcup_{\psi \in \Gamma} D_\psi$,

tử của tập $\mathcal{P}(A)$ bằng 2^n.

Nếu $n = 0$, tức là $A = \phi$ thì rõ ràng $\mathcal{P}(A) = \{\phi\}$ có $2^0 = 1$ phần tử. Giả sử với mọi tập B có $n - 1$ phần tử ta đã chứng minh được $\mathcal{P}(B)$ có 2^{n-1} phần tử, và tập A thu được từ B bằng cách ghép thêm một phần tử a. Thế thì mọi tập con của B cũng là tập con của A, ngoài ra tập A chỉ còn những tập con thu được từ các tập con của B bằng cách ghép thêm phần tử a. Vậy $\mathcal{P}(A)$ có $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$ phần tử.

7. Ta có $A = \{km \mid k \in \mathbf{Z}\}$ và $B = \{ln \mid l \in \mathbf{Z}\}$.

Nếu $s = [m ; n]$ là bội chung nhỏ nhất của m và n thì rõ ràng $A \cap B = \{ps \mid p \in \mathbf{Z}\}$.

8. Giả sử mỗi A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ đều chứa một tập A_j, $j \neq i$ nào đó, thế thì chẳng hạn $A_1 \supset A_{i_1}$, $A_{i_1} \supset A_{i_2}, \ldots$ và ta có chuỗi giảm $A_1 \supset A_{i_1} \supset A_{i_2} \supset \ldots$

Vì tập B chỉ có n phần tử nên trong chuỗi đó tồn tại hai chỉ số $i \neq j$ sao cho $A_i \supset A_j$ và $A_j \supset A_i$, nghĩa là $A_i = A_j$ trái với giả thiết B có n phần tử.

9. Giả sử $k \leqslant \dfrac{n+1}{2}$ và $x \in \bigcap\limits_{H \in \mathcal{G}_k} P_H$. Ta chứng minh rằng tồn tại một tập con $H \subset I$, $H \in \mathcal{G}_k$ sao cho với mọi $i \in H$ ta có $x \in X_i$. Vì $x \in \bigcap\limits_{H \in \mathcal{G}_k} P_H$ nên $x \in P_H$ với mọi $H \in \mathcal{G}_k$. Do đó tồn tại $i_1 \in I$ sao cho $x \in X_{i_1}$.

Giả sử đã tồn tại $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1} \in I$ sao cho

$x \in X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap \ldots \cap X_{i_{k-1}}$. Lấy $H \in \mathcal{G}_k$ sao cho $H \cap \{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}\} = \phi$ $\left(\text{vì } k \leqslant \dfrac{n+1}{2}\right.$ nên bao giờ cũng tồn tại H như vậy). Theo giả thiết $x \in P_H$, do đó tồn tại $i_k \in H$ sao cho $x \in X_{i_k}$. Vậy $x \in X_{i_1} \cap \ldots \cap X_{i_k}$, do đó $x \in Q_H$, trong đó $H = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \in \mathcal{G}_k$.

Vậy nếu $k \leqslant \frac{n+1}{2}$ thì $\bigcap_{H\in\mathcal{G}_k} P_H \subset \bigcup_{H\in\mathcal{G}_k} Q_H$.

Bây giờ giả sử $k \geqslant \frac{n+1}{2}$ và $x \in \bigcup_{H\in\mathcal{G}_k} Q_H$.

Ta chứng minh rằng $x \in P_H$ với mọi $H \in \mathcal{G}_k$.

Thật vậy, giả sử $H_1 = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \in \mathcal{G}_k$.

Vì $x \in \bigcup_{H\in\mathcal{G}_k} Q_H$ nên tồn tại $H_2 \in \mathcal{G}_k$ để $x \in Q_{H_2}$. Theo giả thiết $k \geqslant \frac{n+1}{2}$ nên $H_2 \cap H_1 \neq \phi$, giả sử $i_1 \in H_2 \cap H_1$.

Thế thì $x \in X_{i_1}$, do đó $x \in P_{H_1}$.

10. a) Giả sử $(a, b) \in \alpha(\beta\gamma)$. Thế thì tồn tại $x \in A$ sao cho $(a, c) \in \alpha$, $(c, b) \in \beta\gamma$. Từ hệ thức cuối lại suy ra tồn tại $d \in A$ sao cho $(c, d) \in \beta$ và $(d, b) \in \gamma$.

Từ $(a, c) \in \alpha$ và $(c, d) \in \beta$ suy ra $(a, d) \in \alpha\beta$ và từ $(a, d) \in \alpha\beta$ và $(d, b) \in \gamma$ suy ra $(a, b) \in (\alpha\beta)\gamma$. Vậy $\alpha(\beta\gamma) \subset (\alpha\beta)\gamma$. Bao hàm thức ngược lại cũng chứng minh tương tự.

c) Ta có $(a, b) \in (\alpha^{-1})' \Leftrightarrow (a, b) \notin \alpha^{-1} \Leftrightarrow (b, a) \notin \alpha$, mà $(b, a) \notin \alpha \Leftrightarrow (b, a) \in \alpha' \Leftrightarrow (a, b) \in (\alpha')^{-1}$.

Vậy $(\alpha^{-1})' = (\alpha')^{-1}$.

e) Giả sử $(a, b) \in \alpha(\beta \cup \gamma)$. Thế thì tồn tại $c \in A$ sao cho $(a, c) \in \alpha$ và $(c, b) \in \beta \cup \gamma$, nghĩa là $(c, b) \in \beta$ hoặc $(c, b) \in \gamma$. Từ đó suy ra $(a, b) \in \alpha\beta$ hoặc $(a, b) \in \alpha\gamma$ nghĩa là $(a, b) \in \alpha\beta \cup \alpha\gamma$.

Đảo lại, giả sử $(a, b) \in \alpha\beta \cup \alpha\gamma$, nghĩa là $(a, b) \in \alpha\beta$ hoặc $(a, b) \in \alpha\gamma$. Nếu $(a, b) \in \alpha\beta$ thì tồn tại $c \in A$ sao cho $(a, c) \in \alpha$ và $(c, b) \in \beta$, do đó $(c, b) \in \beta \cup \gamma$, và ta lại được $(a, b) \in \alpha(\beta \cup \gamma)$. Trường hợp $(a, b) \in \alpha\gamma$ chứng minh tương tự. Vậy $\alpha(\beta \cup \gamma) = \alpha\beta \cup \alpha\gamma$.

Ta nêu ví dụ sau đây chứng tỏ $\alpha(\beta \cap \gamma) \neq \alpha\beta \cap \alpha\gamma$.
Lấy $A = \{a, b, c, d\}$, $\alpha = \{(a, b), (a, c)\}$, $\beta = \{(b, d)\}$, $\gamma = \{(c, d)\}$. Thế thì $\beta \cap \gamma = \phi$, $\alpha\beta = \alpha\gamma = \{(a, d)\}$. Vậy $\alpha(\beta \cap \gamma) = \phi \neq \alpha\beta \cap \alpha\gamma = \{(a, d)\}$.

Chú ý rằng ta luôn luôn có $\alpha(\beta \cap \gamma) \subset \alpha\beta \cap \alpha\gamma$.

11. a) $(a, b) \in \alpha^2$ khi và chỉ khi tồn tại số tự nhiên x để $(a, x) \in \alpha$ và $(x, b) \in \alpha$. Để tồn tại x như vậy ắt có và đủ là $a + 1 < b$. Vậy

$$(a, b) \in \alpha^2 \Leftrightarrow a + 1 < b.$$

$$(a, b) \in \alpha^3 \Leftrightarrow a + 2 < b, ...$$

Tương tự, $(a, b) \in \alpha\beta$ khi và chỉ khi tồn tại $x \in \mathbf{N}$ để $(a, x) \in \alpha$ và $(x, b) \in \beta$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $x \in \mathbf{N}$ để $x > \max(a, b)$.

Tương tự $(a, b) \in \beta\alpha$ khi và chỉ khi tồn tại $x \in \mathbf{N}$ để $x < \min(a, b)$.

b) Ta thấy $\alpha^{-1} = \beta$ (xem câu trên), do đó $\alpha\alpha^{-1} = \alpha\beta$. Từ câu a), ta thấy $\alpha\beta \neq \varepsilon_N$.

12. a) Giả sử $\alpha \subset \beta$ và $(a, b) \in \alpha^{-1}$. Thế thì $(b, a) \in \alpha$, do đó $(b, a) \in \beta$ và $(a, b) \in \beta^{-1}$.

Những mệnh đề còn lại chứng minh tương tự.

b). Trước hết từ $\alpha \subset \alpha^{-1}$ ta suy ra $\alpha = \alpha^{-1}$ vì theo câu a) $\alpha^{-1} \subset (\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$. Do đó từ $\alpha\beta \subset \beta\alpha$ ta suy ra

$$(\alpha\beta)^{-1} \subset (\beta\alpha)^{-1} = \alpha^{-1}\beta^{-1} = \alpha\beta,$$

và

$$\beta\alpha = \beta^{-1}\alpha^{-1} = (\alpha\beta)^{-1} \subset \alpha\beta,$$

nghĩa là $\alpha\beta = \beta\alpha$.

c) Theo câu a) từ $\varepsilon_A \subset \alpha$ suy ra $\varepsilon_A\alpha^{-1} \subset \alpha\alpha^{-1} \subset \alpha$, do đó $\alpha^{-1} \subset \alpha$, và vì vậy $\alpha^{-1} = \alpha$. Bây giờ từ điều kiện $\alpha\alpha^{-1} \subset \alpha$ suy ra $\alpha^2 \subset \alpha$.

13. a) $\beta^{-1} = \{(3, 1), (2, 2), (4, 3), (3, 4), (6, 5), (6, 6)\}$, do đó

$$\beta\beta^{-1} = \{(1, 1), (1, 4), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}.$$

b) $\alpha^{-1} = \{(2, 1), (4, 2), (1, 3), (3, 4), (6, 5), (5, 6)\}$, do đó

$$\alpha\alpha^{-1} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) (5, 5) (6, 6)\} = \varepsilon_A.$$

Như vậy $\alpha\alpha^{-1}\alpha = \alpha$, tương-tự $\beta\beta^{-1}\beta = \beta$.

14. Các lớp ghép của A theo quan hệ α là $\{0, 1\}$ và $\{0, 2\}$ còn các lớp ghép của B theo quan hệ α^{-1} là $\{a, b\}$, $\{a\}$ và $\{b\}$.

15. a) Với mọi quan hệ $\alpha \subset A \times B$ bao giờ cũng có $\alpha \subset \alpha\alpha^{-1}\alpha$, nên α là một hàm kép khi và chỉ khi $\alpha\alpha^{-1}\alpha = \alpha$.

b) Giả sử các lớp ghép khác nhau của A theo quan hệ α không giao nhau từng đôi một, và $(a, b) \in \alpha\alpha^{-1}\alpha$. Thế thì tồn tại $a_1 \in A$, $b_1 \in B$ sao cho $(a_1, b_1) \in \alpha$, $(b_1, a_1) \in \alpha^{-1}$, $(a_1, b) \in \alpha$. Vì $a_1 \in b\alpha^{-1}$, $a_1 \in b_1\alpha^{-1}$ nên $b\alpha^{-1} = b_1\alpha^{-1}$. Nhưng $a \in b_1\alpha^{-1}$, vì vậy $a \in b\alpha^{-1}$, nghĩa là $(a, b) \in \alpha$. Vậy $\alpha\alpha^{-1}\alpha \subset \alpha$, và α là một hàm kép từ A tới B.

Đối với các lớp ghép của B theo quan hệ α^{-1} chứng minh tương tự.

c) Giả sử $\alpha \subset A \times B$ là một hàm kép từ A tới B, và giả sử đối với các phần tử $a, a_1 \in A$ ta có $a\alpha \cap a_1\alpha \neq \emptyset$. Thế thì tồn tại $b_1 \in B$ sao cho $(a, b_1) \in \alpha$, $(a_1, b_1) \in \alpha$. Nếu $b \in a_1\alpha$ thì $(a_1, b) \in \alpha$. Từ $(a, b_1) \in \alpha$, $(b_1, a_1) \in \alpha^{-1}$ và $(a_1, b) \in \alpha$ suy ra $(a, b) \in \alpha\alpha^{-1}\alpha$, và vì $\alpha\alpha^{-1}\alpha \subset \alpha$ nên $(a, b) \in \alpha$, nghĩa là $b \in a\alpha$. Vậy $a_1\alpha \subset a\alpha$. Tương tự ta cũng chứng minh được bao hàm thức ngược lại, do đó $a_1\alpha = a\alpha$.

16. Suy từ bài tập 12.

17. a) Rõ ràng $[(a, b), (a, b)] \in \alpha$ và nếu $[(a, b), (c, d)] \in \alpha$ thì $[(c, d), (a, b)] \in \alpha$. Ta chứng minh $\alpha^2 \subset \alpha$.

Giả sử $[(a, b), (c, d)] \in \alpha$, $[(c, d), (e, f)] \in \alpha$. Thế thì $ad = bc$, $cf = de$. Từ đó suy ra $af = be$ nghĩa là $[(a, b), (e, f)] \in \alpha$.

b) Mỗi lớp tương đương của A theo quan hệ tương đương α chứa cặp (a, b) ứng với số hữu tỷ $\frac{a}{b} \in Q$.

18. a) $\varepsilon_A \subset \alpha$ và $\varepsilon_A \subset \beta$ do đó $\varepsilon_A \subset \alpha \cap \beta$. Mặt khác, $(\alpha \cap \beta)^{-1} = \alpha^{-1} \cap \beta^{-1} = \alpha \cap \beta$. Giả sử $(a, b) \in \alpha \cap \beta$ và $(b, c) \in \alpha \cap \beta$. Thế thì $(a, b) \in \alpha$, $(a, b) \in \beta$, $(b, c) \in \alpha$, $(b, c) \in \beta$, do đó $(a, c) \in \alpha$ và $(a, c) \in \beta$ nghĩa là $(a, c) \in \alpha \cap \beta$.

b) Giả sử B là một lớp tương đương theo α và C là một lớp tương đương theo β sao cho $B \not\subset C$, $C \not\subset B$ và $B \cap C \neq \phi$. Thế thì tồn tại các phần tử $a \in B \cap C$, $b \in B \setminus C$ và $c \in C \setminus B$, nghĩa là $(b, a) \in \alpha$, $(c, a) \in \beta$, $(b, a) \in \beta'$ và $(c, a) \in \alpha'$. Các cặp (b, a) và (a, c) thuộc $\alpha \cup \beta$, nên nếu $\alpha \cup \beta$ là một quan hệ tương đương thì ta có $(b, c) \in \in \alpha \cup \beta$. Nhưng điều đó không xảy ra vì nếu $(b, c) \in \alpha$ và $(b, a) \in \alpha$ thì $(c, a) \in \alpha$ trái giả thiết $(c, a) \in \alpha'$, còn nếu $(b, c) \in \beta$ và $(c, a) \in \beta$ thì $(b, a) \in \beta$ trái giả thiết $(b, a) \in \beta'$.

Vậy nếu $\alpha \cup \beta$ là một lớp tương đương thì với mọi lớp tương đương B theo α và mọi lớp tương đương C theo β ta có $B \subset C$ hoặc $C \subset B$ hoặc $B \cap C = \phi$.

Đảo lại, giả sử các lớp tương đương theo α và β thỏa mãn điều kiện đó, ta chứng minh $\alpha \cup \beta$ là một quan hệ tương đương. Trước hết rõ ràng $\varepsilon_A \subset \alpha \cup \beta$ và $(\alpha \cup \beta)^{-1} = \alpha^{-1} \cup \beta^{-1} = \alpha \cup \beta$. Cuối cùng theo bài 10.

$$(\alpha \cup \beta)(\alpha \cup \beta) = \alpha^2 \cup \alpha\beta \cup \beta\alpha \cup \beta^2 =$$
$$= \alpha \cup \alpha\beta \cup \beta\alpha \cup \beta.$$

Với giả thiết của bài toán ta có $\alpha\beta \subset \alpha \cup \beta$ và $\beta\alpha \subset \alpha \cup \beta$, vậy $(\alpha \cup \beta)(\alpha \cup \beta) = \alpha \cup \beta$.

19. a) Nếu $\alpha\beta$ là một quan hệ tương đương thì $\alpha\beta = (\alpha\beta)^{-1}$, từ đó $\alpha\beta = \beta^{-1}\alpha^{-1} = \beta\alpha$.

Đảo lại, giả sử $\alpha\beta = \beta\alpha$. Vì $\varepsilon_A \subset \alpha$ và $\varepsilon_A \subset \beta$ nên $\alpha \subset \alpha\beta$ và $\varepsilon_A \subset \alpha\beta$. Hơn nữa $(\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1} = \beta\alpha = \alpha\beta$. Cuối cùng $(\alpha\beta)^2 = \alpha\beta\alpha\beta = \alpha\alpha\beta\beta = \alpha\beta$.

b) Từ $\varepsilon_A \subset \alpha$ suy ra $\varepsilon_A\beta \subset \alpha\beta$ hay $\beta \subset \alpha\beta$, và từ $\varepsilon_A \subset \beta$ suy ra $\alpha\varepsilon_A \subset \alpha\beta$ hay $\alpha \subset \alpha\beta$. Mặt khác, giả sử $\alpha \subset \gamma$, $\beta \subset \gamma$, γ là một quan hệ tương đương, và $(a, b) \in \alpha\beta$. Thế thì tồn tại $c \in A$ sao cho $(a, c) \in \alpha$, $(c, b) \in \beta$, do đó $(a, c) \in \gamma$ và $(c, b) \in \gamma$ kéo theo $(a, b) \in \gamma$. Vậy $\alpha\beta \subset \gamma$.

c) Suy từ *a* và *b*.

20. a) Rõ ràng $\varepsilon_A \subset \rho_1$ và $\rho_1^{-1} = \rho_1$, nên $\rho_1^!$ cũng có các tính chất đó. Giả sử $(a, b) \in \rho_1^!$, $(b, c) \in \rho_1^!$. Thế thì tồn tại các phần tử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_m$ sao cho $(a, a_1) \in \rho_1$, $(a_1, a_2) \in \rho_1, \ldots, (a_{n-1}, a_n) \in \rho_1$, $(a_n, b) \in \rho_1$, $(b, b_1) \in \rho_1, \ldots$, $(b_m, c) \in \rho_1$. Theo định nghĩa từ các hệ thức đó ta suy ra $(a, c) \in \rho_1^{n+m+1}$; tức là $(a, c) \in \rho_1^!$.

b) Giả sử γ là một quan hệ tương đương trên A sao cho $\rho \subset \gamma$. Thế thì $\rho_1 = \rho \cup \rho^{-1} \cup \varepsilon_A \subset \gamma$, do đó $\rho_1^n \subset \gamma^n = \gamma$ với mọi $n = 1, 2, \ldots$ nghĩa là $\rho_1^! \subset \gamma$.

c) Rõ ràng $\varepsilon_A \subset \alpha \cup \beta$ và $(\alpha \cup \beta)^{-1} = \alpha^{-1} \cup \beta^{-1} = \alpha \cup \beta$. Những điều còn lại chứng minh tương tự câu a) và b).

21. Rõ ràng $\varepsilon_A \subset \sigma$. Ta chứng minh $\sigma^{-1} \subset \sigma$. Thật vậy, giả sử $(a, b) \in \sigma$. Thế thì tồn tại các quan hệ $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}$ thuộc họ $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ sao cho $(a, b) \in \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_k}$.

Theo định nghĩa, ta có $(b, a) \in (\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \ldots \alpha_{i_k})^{-1} = \alpha_{i_k}^{-1} \ldots$
$\alpha_{i_2}^{-1} \alpha_{i_1}^{-1} = \alpha_{i_k} \ldots \alpha_{i_2} \alpha_{i_1} \subset \sigma$. Cuối cùng, giả sử $(a, b) \in \sigma$, $(b, c) \in \sigma$. Thế thì tồn tại các quan hệ tương đương $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}$ và $\beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_l}$ sao cho $(a, b) \in \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_k}$, $(b, c) \in \beta_{j_1} \ldots \beta_{j_l}$. Lúc đó $(a, c) \in \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_k} \beta_{j_1} \ldots \beta_{j_l} \subset \sigma$.

Vậy σ là một quan hệ tương đương và rõ ràng σ chứa mọi α_i, $i \in I$.

Nếu γ là một quan hệ tương đương trên A chứa mọi α_i, $i \in I$ thì γ chứa mọi tích có thể của một số hữu hạn α_i, $i \in I$ (và do đó chứa hợp của chúng, tức là chứa σ). Thật vậy, chỉ cần xét trường hợp hai nhân tử : $\alpha_1 \subset \gamma$, $\alpha_2 \subset \gamma$ thì $\alpha_1\alpha_2 \subset \gamma^2 = \gamma$.

22. a) α không phải là một quan hệ tương đương trên $\mathbf{R}$ vì chẳng hạn $e_R \not\subset \alpha$: với mọi $x > 1$, $(x, x) \notin \alpha$.

b) Quan hệ tương đương trên $\mathbf{R}$ sinh bởi α là

$$e_R \cup \{(x, x+n) \mid x \geqslant 0,\ n \text{ nguyên} > 0 \text{ tùy ý}\} \cup$$
$$\cup \{(x+n, x) \mid x \geqslant 0,\ n \text{ nguyên} > 0 \text{ tùy ý}\}.$$

23. a) α không phải là một quan hệ tương đương trên $\mathscr{H}(N)$ vì $\alpha^{-1} \not\subset \alpha$.

b) Quan hệ tương đương σ sinh bởi α là $\sigma = \alpha \cap \alpha^{-1}$. Nếu $A, B \in \mathscr{H}(N)$ và ký hiệu $s(A)$ là tổng các phần tử thuộc A thì $(A, B) \in \sigma$ khi và chỉ khi $s(A) = s(B)$.

c) Theo câu b) mỗi lớp tương đương $\mathscr{C}_k$ theo σ gồm tất cả các tập con A của tập N mà $s(A) = k$. Ta chứng minh $\mathscr{C}_k$ hữu hạn. Vì mỗi tập $A \in \mathscr{C}_k$ có số phần tử $\leqslant k$, và với mọi số tự nhiên $n \in A$ ta có $n \leqslant k$, do đó số các phần tử trong lớp $\mathscr{C}_k$ không vượt quá 2^k là số tất cả các tập con của một tập có k phần tử.

24. Giả sử A là một tập có $n+1$ phần tử, và $a \in A$ là một phần tử đã cho. Với $1 \leqslant k \leqslant n+1$ ký hiệu $\mathcal{B}_k$ là tập tất cả các tập con gồm k phần tử của A chứa a. Dễ thấy rằng $\mathcal{B}_k$ có C_n^{k-1} phần tử vì mỗi $B \in \mathcal{B}_k$ thu được bằng cách ghép thêm vào a $k-1$ phần thuộc $A \setminus \{a\}$.

Với mỗi $B \in \mathcal{B}_k$ tập $A \setminus B$ có $n+1-k$ phần tử, do đó theo định nghĩa trên $A \setminus B$ có p_{n+1-k} tương đương. Với mỗi tương đương α trên $A \setminus B$ ta xét tương đương α^* trên A bằng cách giữ nguyên các lớp tương đương cũ theo α trên $A \setminus B$ và thêm một lớp tương đương mới là B.

Nếu α và β là hai quan hệ tương đương khác nhau trên $A \setminus B$ thì rõ ràng $\alpha^* \neq \beta^*$, do đó với mỗi $B \in \mathcal{B}_k$, ta thu được p_{n+1-k} tương đương α^* như vậy trên A. Cho B chạy khắp $\mathcal{B}_k$ và cho k đi từ 1 tới $n+1$ ta thu được

$$\sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1}\, p_{n+1-k} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i\, p_i$$

tương đương dạng α^* như vậy trên A.

Để chứng minh $p_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i\, p_i$

ta chỉ cần chứng minh rằng mỗi tương đương γ trên A đều trùng với một tương đương α^* xây dựng được bằng cách đó.

Thật vậy, giả sử γ là một tương đương bất kỳ trên A và B là lớp tương đương theo γ chứa a. Nếu B có k phần tử thì $B \in \mathcal{B}_k$. Giả sử α là quan hệ tương đương trên tập $A \setminus B$ mà các lớp tương đương trùng với các lớp tương đương của γ. Thế thì rõ ràng $\gamma = \alpha^*$.

2) Với $B \in D_{\varphi_0}$ sẽ tồn tại $\varphi \in \Gamma$ sao cho $B \in D_{\varphi}$, thế thì ta đặt $\varphi_0(B) = \varphi(B)$.

Ánh xạ φ_0 được xác định và rõ ràng là cận trên của Γ. Theo bổ đề Zoóc trong Φ có phần tử tối đại, giả sử φ là một phần tử tối đại của Φ. Để kết thúc, ta chỉ cần chứng minh $D_{\varphi} = \mathcal{M}$. Nếu $D_{\varphi} \neq \mathcal{M}$ thì tồn tại $B_1 \in \mathcal{M}/D_{\varphi}$. Lúc đó ta xây dựng ánh xạ φ' như sau : $D_{\varphi'} = D_{\varphi} \cup \{B_1\}$, và trên D_{φ} thì $\varphi' = \varphi$, ngoài ra $\varphi'(B_1) = b_1$, với $b_1 \in B_1$ nào đó.

Rõ ràng $\varphi' \in \Phi$ và $\varphi' > \varphi$ trái với tính tối đại của φ.

– *Từ tiên đề chọn suy ra định lý Zermelo.*

Giả sử A là một tập sắp thứ tự tốt. Với mỗi $a \in A$ ta ký hiệu $P_a = \{x \in A \mid x < a\}$ và gọi là một *đoạn* của A xác định bởi phần tử a. Nếu a là phần tử tối tiểu của A thì $P_a = \emptyset$.

Bây giờ giả sử đã cho một tập M tùy ý. Theo tiên đề chọn, trong mỗi tập con $N \neq \emptyset$ của M ta chọn một phần tử $\varphi(N)$. Ta gọi một tập con A của tập M là một *tập con tốt*, nếu nó được sắp thứ tự tốt sao cho với mọi $a \in A$ ta có $a = \varphi(M \setminus P_a)$. Các tập con tốt của M tồn tại : chẳng hạn tập con chỉ gồm một phần tử $\varphi(M)$.

Giả sử A và B là hai tập con tốt của M. Thế thì A và B đều có phần tử bé nhất là $\varphi(M)$, do đó chúng có những đoạn khác rỗng trùng nhau. Nếu C là hợp của tất cả các đoạn trùng nhau của A và B thì C cũng là một đoạn của A và B và là đoạn trùng nhau lớn nhất của chúng. Nếu $C \neq A$ và $C \neq B$ thì theo định nghĩa của tập con tốt, $C = P_c$, trong đó $c = \varphi(M \setminus C)$. Lúc đó A và B có chung một đoạn $\overline{C} = C \cup \{c\}$ lớn hơn đoạn C trái với định nghĩa của đoạn C. Vậy một trong hai tập con tốt A và B là một đoạn của tập kia. Từ đó suy ra rằng hợp L của tất cả các tập con tốt của tập M cũng là một tập con tốt. Thật vậy nếu các phần tử $a, b \in L$ thuộc các tập con tốt

A và B tương ứng thì a và b cùng thuộc tập lớn hơn trong chúng, chẳng hạn A.

Ta đặt $a \leqslant b$ trong L nếu $a \leqslant b$ trong A. Quan hệ $\leqslant$ đó là một thứ tự toàn phần trong L, hơn nữa là một thứ tự tốt, vì mọi chuỗi giảm các phần tử của L được chứa hoàn toàn trong một tập con tốt nào đó và do đó bị ngắt đoạn (xem bài tập 27).

Cuối cùng, nếu $a \in L$ thì a được chứa trong một tập con tốt A nào đó và xác định trong A và L cùng một đoạn P_a và $a = \varphi(M \setminus P_a)$. Vậy L là một tập con tốt của M.

Nếu $L \neq M$ thì tương tự trên ta lại thu được một tập con tốt của M lớn hơn L, bằng cách ghép thêm vào L phần tử $\varphi(M \setminus L)$ và coi phần tử đó lớn hơn mọi phần tử của L, điều này mâu thuẫn với định nghĩa của L. Vậy $L = M$ và M sắp thứ tự tốt.

Từ định lý Zermelo suy ra bổ đề Zoóc.

Giả sử trên một tập M đã cho một quan hệ thứ tự $\leqslant$ sao cho mọi tập con sắp thứ tự toàn phần của M đều có cận trên. Ta chứng minh rằng với mỗi phần tử $a \in M$ tồn tại một phần tử tối đại $m \in M$ sao cho $a \leqslant m$.

Theo định lý Zermelo, trên M có một quan hệ thứ tự $\prec$ (nói chung khác với $\leqslant$) sao cho với quan hệ $\prec$ thì M là một tập sắp thứ tự tốt. Thế thì ta có thể phân loại các phần tử của tập M ra hai loại, loại 1 và loại 2, dựa vào nguyên lý quy nạp siêu hạn (xem bài tập 27) như sau :

Nếu $b \in M$ là một phần tử tối tiểu thì b thuộc loại 1 nếu $b \geqslant a$, b thuộc loại 2 trong các trường hợp khác. Giả sử ta đã phân loại được mọi phần tử $c' \prec c$ sao cho c' thuộc loại 1 nếu $c' \geqslant a$ và $c' >$ mọi phần tử thuộc loại 1 đã có, và c' thuộc loại 2 trong các trường hợp khác. Thế thì phần tử c sẽ được xếp vào loại 1 nếu $c \geqslant a$ và $c >$ mọi phần tử đã thuộc loại 1, và c thuộc loại 2 trong các

trường hợp khác. Như vậy theo nguyên lý quy nạp siêu hạn ta phân loại được mọi phần tử thuộc tập M.

Bây giờ ta ký hiệu D là tập mọi phần tử thuộc loại 1. Thế thì D với quan hệ $\leqslant$ là một tập sắp thứ tự toàn phần, vì với $d_1, d_2 \in D$ ta có hoặc $d_1 \prec d_2$ hoặc $d_2 \prec d_1$. Khi đó theo định nghĩa của các phần tử loại 1 ta có tương ứng hoặc $d_1 \leqslant d_2$ hoặc $d_2 \leqslant d_1$. Theo giả thiết D có cận trên là m nào đó. Ta có $m \geqslant a$ và m là phần tử tối đại của M vì nếu có $n \geqslant m$ thì $n \geqslant$ mọi phần tử thuộc loại 1 nên theo cách xây dựng các phần tử loại 1 ta có $n \in D$, tức là $n \leqslant m$, mâu thuẫn!

29. a) Nếu E là tập sắp thứ tự tốt thì chỉ cần lấy $A = E$, $B = \phi$. Giả sử tồn tại những tập con của E không chứa phần tử bé nhất. Lấy B là hợp của tất cả các tập con của E không chứa phần tử bé nhất. Thế thì rõ ràng $A = E \setminus B$ là một tập sắp thứ tự tốt vì mọi tập con của A đều chứa phần tử bé nhất, còn B không chứa phần tử bé nhất.

b) Chẳng hạn E là tập tất cả các số thực $\geqslant 0$, A là tập tất cả các số tự nhiên, $B = E \setminus A$. Hoặc A là tập tất cả các số chẵn $\geqslant 0$, $B = E \setminus A$.

30. a) Rõ ràng $X \leqslant X$, vì với mọi $x \in X$, $(x, x) \in \alpha$. Giả sử $X \leqslant Y$ và $Y \leqslant X$, nghĩa là với mọi $x \in X$ tồn tại $y \in Y$ sao cho $(x, y) \in \alpha$ và với mọi $y' \in Y$ tồn tại $x' \in X$ sao cho $(y', x') \in \alpha$. Ta chứng minh $X = Y$. Lấy $x \in X$, tồn tại $y \in Y$ để $(x, y) \in \alpha$. Vì $Y \leqslant X$ nên đối với $y \in Y$ đó tồn tại $x_1 \in X$ để $(y, x_1) \in \alpha$. Vì α là một quan hệ thứ tự nên $(x, y) \in \alpha$ và $(y, x_1) \in \alpha$ kéo theo $(x, x_1) \in \alpha$. Vì X là một tập con tự do nên $x = x_1$. Bây giờ từ $(x, y) \in \alpha$ và $(y, x) \in \alpha$ suy ra $x = y$, nghĩa là $x \in Y$. Vậy $X \subset Y$. Tương tự ta cũng chứng minh được $Y \subset X$, do đó $X = Y$. Cuối cùng nếu $X \leqslant Y$ và $Y \leqslant Z$ thì rõ ràng $X \leqslant Z$.

b) Nếu $X, Y \in \mathcal{S}$ và $X \subset Y$ thì $X \leqslant Y$ vì với mọi $x \in X$ tồn tại $y \in Y$ để $(x, y) \in \alpha$, cụ thể là lấy $y = x$.

c) Giả sử tập E với quan hệ thứ tự α là một tập sắp thứ tự toàn phần. Thế thì mỗi tập $X \in \mathcal{S}$ chỉ gồm một phần tử, do đó nếu $X = \{a\}$, $Y = \{b\}$ thì $X \leqslant Y$ nếu $(a, b) \in \alpha$ và $Y \leqslant X$ nếu $(b, a) \in \alpha$.

Đảo lại nếu $\mathcal{S}$ với quan hệ thứ tự $\leqslant$ là một tập sắp thứ tự toàn phần. Với $a, b \in E$ các tập $\{a\}$, $\{b\}$ là những tập con tự do nên là những phần tử của tập $\mathcal{S}$, do đó nếu $\{a\} \leqslant \{b\}$ thì $(a, b) \in \alpha$ còn nếu $\{b\} \leqslant \{a\}$ thì $(b, a) \in \alpha$.

31 a) phần tử bé nhất của dàn đầy đủ A chính là inf A, còn phần tử lớn nhất là sup A.

b) Với mọi tập con $\mathcal{F}$ của tập $\mathcal{P}(E)$ thì sup $\mathcal{F}$ chính là hợp của mọi tập con thuộc $\mathcal{F}$, còn inf $\mathcal{F}$ chính là giao của mọi tập con thuộc $\mathcal{F}$.

c) Theo câu a) N không phải là một dàn đầy đủ vì không chứa phần tử lớn nhất.

32. Giả sử $\mathcal{R}$ là một tập con của tập $\mathcal{S}$ các quan hệ tương đương trên tập E. Thế thì inf $\mathcal{R}$ chính là giao của tất cả các quan hệ tương đương thuộc $\mathcal{R}$, còn sup $\mathcal{R}$ chính là quan hệ tương đương bé nhất trên E chứa các quan hệ thuộc $\mathcal{R}$, theo bài 21 đó chính là hợp σ của tất cả các tích có thể của một số hữu hạn quan hệ thuộc $\mathcal{R}$.

33. a) Giả sử $B \neq \emptyset$ là một tập con của A. Ta chứng minh tồn tại sup B. Trong A tồn tại những phần tử c sao cho $c \geqslant b$ với mọi $b \in B$, chẳng hạn phần tử lớn nhất của tập A (tồn tại theo giả thiết). Giả sử C là tập tất cả các phần tử c đó và $d = \inf C$ (tồn tại theo giả thiết). Ta chứng minh $d = \sup B$. Nếu $b \in B$ thì $b \leqslant c$ với mọi $c \in C$, do đó $b \leqslant d$. Mặt khác nếu $c \geqslant b$ với mọi $b \in B$ thì $c \in C$, do đó $c \geqslant d$.

b) Chứng minh tương tự câu a).

34 a) Với $a, b \in N$ thì inf $\{a, b\}$ là ước chung lớn nhất của a và b, còn sup $\{a, b\}$ là bội chung nhỏ nhất của a và b.

b) Nếu $a \leqslant b$ thì $\inf\{a, b\} = a$, $\sup\{a, b\} = b$.

c) Nếu a và b là hai phần tử tối đại và $a \neq b$ thì $\sup\{a, b\} \geqslant a$ và $\sup\{a, b\} \geqslant b$ trái với tính tối đại của a và b.

35. a) Giả sử $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$. Thế thì $f(a_1) \neq f(a_2)$, do đó $g[f(a_1)] \neq g[f(a_2)]$, tức là $\varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$.

b) Với $c \in C$ tồn tại $b \in B$ sao cho $g(b) = c$. Vì f là toàn ánh nên tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$. Thế thì

$$\varphi(a) = (gf)(a) = g[f(a)] = g(b) = c.$$

c) Nếu tồn tại $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$ mà $f(a_1) = f(a_2)$ thì $\varphi(a_1) = (gf)(a_1) = g[f(a_1)] = g[f(a_2)] = (gf)(a_2) = \varphi(a_2)$.

d) Nếu $g(B) \neq C$ thì $\varphi(A) = (gf)(A) = g[f(A)] \subset \subset g(B) \neq C$ nên φ không phải là toàn ánh.

36. (a) ⇒ (b). Vì $\alpha : A \to B$ là một song ánh nên với mỗi $b \in B$ chỉ có một $a \in A$ để $(a, b) \in \alpha$, tức $(b, a) \in \alpha^{-1}$. Vậy α^{-1} là một ánh xạ từ B tới A.

(b) ⇒ (c). Ta có $(a, a_1) \in \alpha\alpha^{-1}$ khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ sao cho $(a, b) \in \alpha$ và $(b, a_1) \in \alpha^{-1}$. Nhưng từ $(b, a) \in \alpha^{-1}$ và $(b, a_1) \in \alpha^{-1}$ suy ra $a = a_1$ vì α^{-1} là một ánh xạ từ B tới A. Vậy $\alpha\alpha^{-1} \subset \varepsilon_A$ và do đó $\alpha\alpha^{-1} = \varepsilon_A$.

(c) ⇒ (a). Ta chứng minh α là một ánh xạ từ A tới B. Vì $\alpha\alpha^{-1} = \varepsilon_A$ nên với mọi $a \in A$ tồn tại $b \in B$ để $(a, b) \in \alpha$. Nếu có $b_1 \in B$ mà $(a, b_1) \in \alpha$ thì $(b_1, a) \in \alpha^{-1}$. Từ đó cùng với $(a, b) \in \alpha$ suy ra $(b_1, b) \in \alpha^{-1}\alpha = \varepsilon_B$, do đó $b = b_1$. Bây giờ giả sử có $(a, b) \in \alpha$, $(a_1, b) \in \alpha$. Thế thì $(a, b) \in \alpha$ và $(b, a_1) \in \alpha^{-1}$ kéo theo $(a, a_1) \in \alpha\alpha^{-1} = \varepsilon_A$ hay $a = a_1$. Vậy α là một đơn ánh.

Cuối cùng vì $\alpha^{-1}\alpha = \varepsilon_B$ nên với $b \in B$ tồn tại $a \in A$ để $(b, a) \in \alpha^{-1}$ hay $(a, b) \in \alpha$, nghĩa là α là một toàn ánh.

37. Ta ký hiệu M là tập tất cả các đơn ánh φ từ một tập con nào đó của A (gọi là miền xác định của φ và ký hiệu

là D_φ) tới B. Vì A và B khác rỗng nên rõ ràng $M \neq \varnothing$ (chẳng hạn $a \in A$, $b \in B$ thì ta có $\{(a, b)\} \in M$).

Trên M ta đưa xét quan hệ thứ tự là quan hệ bao hàm. Ta chứng tỏ M có phần tử tối đại bằng cách dùng bổ đề Zoóc. Giả sử F là một tập con sắp thứ tự toàn phần của M, nghĩa là một tập con các đơn ánh φ_i, $i \in I$ sao cho với mọi $i, j \in I$ ta có $\varphi_i \subset \varphi_j$ hoặc $\varphi_j \subset \varphi_i$. Ký hiệu $\varphi = \bigcup_{i \in I} \varphi_i$.

Rõ ràng $\varphi_i \subset \varphi$ với mọi $i \in I$. Để chứng tỏ φ là cận trên của tập con F ta cần chứng tỏ $\varphi \in M$. Thật vậy, giả sử $(a_1, b) \in \varphi$, $(a_2, b) \in \varphi$, thế thì tồn tại $i, j \in I$ để $(a_1, b) \in \varphi_i$ và $(a_2, b) \in \varphi_j$. Vì F sắp thứ tự toàn phần nên chẳng hạn $\varphi_i \subset \varphi_j$, lúc đó $(a_1, b) \in \varphi_j$, $(a_2, b) \in \varphi_j$ mà $\varphi_j \in M$, suy ra $a_1 = a_2$. Tương tự, nếu $(a, b_1) \in \varphi$, $(a, b_2) \in \varphi$ ta cũng có $b_1 = b_2$. Vậy $\varphi \in M$.

Ký hiệu φ_0 là một phần tử tối đại của M. Nếu $D_{\varphi_0} = A$ thì φ_0 là một đơn ánh từ A tới B, còn nếu φ_0 là một toàn ánh lên B, tức là $\varphi_0(D_{\varphi_0}) = B$ thì φ_0^{-1} là một đơn ánh từ B tới A. Còn lại ta sẽ chứng tỏ không thể có đồng thời $D_{\varphi_0} \neq A$ và $\varphi_0(D_{\varphi_0}) \neq B$. Thật vậy, giả sử có $a \in A \setminus D_{\varphi_0}$ và $b \in B \setminus \varphi_0(D_{\varphi_0})$. Lúc đó dễ thấy rằng $\varphi^* = \varphi_0 \cup \{(a, b)\} \in M$ mâu thuẫn với tính tối đại của φ_0.

38. Ta xét các tập $\alpha^0(C) = C$, $\alpha^{n+1}(C) = \alpha(\alpha^n(C))$, $n = 0, 1, \ldots$ và $S = \bigcup_{n=0}^{\infty} \alpha^n(C)$.

Khi đó ánh xạ β xác định như sau:

$$\beta(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } x \in S, \\ \alpha(x) & \text{nếu } x \in A \setminus S. \end{cases}$$

Vì $S = C \cup \alpha(S)$ nên ta có

$S \cap \alpha(A \setminus S) = [C \cap \alpha(A \setminus S)] \cup [\alpha(S) \cap \alpha(A \setminus S)] = \varnothing$.

Như vậy theo định nghĩa β là đơn ánh trên hai tập rời

nhau S và $A \setminus S$ và có trị thuộc hai tập rời nhau tương ứng S và $\alpha(A \setminus S)$, nên β là một đơn ánh.

Mặt khác β là một toàn ánh từ A lên $C \cup \alpha(A)$. Vì $\beta(A) = S \cup \alpha(A \setminus S) = C \cup \alpha(S) \cup \alpha(A \setminus S) = C \cup \alpha(A)$.

39. *Cách chứng minh thứ nhất.* Dùng bài tập 38.

Giả sử ta có các đơn ánh $\varphi : A \to B$ và $\Psi : B \to A$.

Ta cần xây dựng một song ánh từ A tới B. Vì $\alpha = \Psi\varphi$ là một đơn ánh từ A tới A, nên theo bài tập 38, nếu lấy $C = \Psi(B) \setminus \alpha(A)$ thì $C \subset A \setminus \alpha(A)$ và ta có song ánh β từ A tới $\beta(A) = C \cup \alpha(A) = \Psi(B)$. Nếu ký hiệu $\gamma : \Psi(B) \to B$ là ánh xạ ngược của ánh xạ $\Psi : B \to \Psi(B)$, $\gamma = \Psi^{-1}$, thì $\gamma\beta$ là song ánh cần tìm.

Cách chứng minh thứ hai. Chứng minh trực tiếp.

Ta có $\alpha = \Psi\varphi$ là một đơn ánh từ A tới A. Đặt $A_0 = A$, $A_1 = \Psi(B)$. Tất nhiên có thể giả thiết $A_1 \neq A_0$. Tiếp theo đặt

$$A_i = \alpha(A_{i-2}),\ i = 2, 3, \ldots \text{ và } D = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Rõ ràng ta có $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ và

$$A = D \cup \Big[\bigcup_{i=0}^{\infty} (A_{2i} \setminus A_{2i+1})\Big] \cup \Big[\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_{2i-1} \setminus A_{2i})\Big],$$

$$A_1 = D \cup \Big[\bigcup_{i=0}^{\infty} (A_{2i+2} \setminus A_{2i+3})\Big] \cup \Big[\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_{2i-1} \setminus A_{2i})\Big],$$

và các tập trong mỗi hợp ở vế phải không giao nhau từng đôi một.

Vì $\alpha(A_{2i} \setminus A_{2i+1}) = A_{2i+2} \setminus A_{2i+3}$ nên ta có thể lập một song ánh θ từ A lên A_1 như sau:

$$\theta(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } x \in D \text{ hoặc } x \in A_{2i-1} \setminus A_{2i},\ i = 1, 2, \ldots \\ \alpha(x) & \text{nếu } x \in A_{2i} \setminus A_{2i+1},\ i = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Khi đó $f = \Psi^{-1}\theta$ là song ánh cần tìm từ A tới B.

40. a) Nếu $x \in A \cap B$ thì $\chi_A(x) = \chi_B(x) = 1$, do đó $\chi_A(x)\,\chi_B(x) = 1$. Nếu $x \notin A \cap B$ thì $x \notin A$ hoặc $x \notin B$, do đó $\chi_A(x)\,\chi_B(x) = 0$. Vậy $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x)\,\chi_B(x)$.

b) Giả sử $x \in A \cup B$. Thế thì có ba khả năng :

1) $x \in A$ và $x \notin B$, lúc đó $\chi_A(x) = 1$, $\chi_B(x) = 0$,

2) $x \notin A$ và $x \in B$; lúc đó $\chi_A(x) = 0$, $\chi_B(x) = 1$,

3) $x \in A$ và $x \in B$, lúc đó $\chi_A(x) = \chi_B(x) = 1$.

Trong cả ba khả năng ta đều có

$$\chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\,\chi_B(x) = 1.$$

Nếu $x \notin A \cup B$ thì $x \notin A$ và $x \notin B$, do đó

$$\chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\,\chi_B(x) = 0.$$

Vậy $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\,\chi_B(x)$.

c) Nếu $x \in A \setminus B$ thì $x \in A$ và $x \notin B$, do đó

$$\chi_A(x)\,[1 - \chi_B(x)] = 1.$$

Nếu $x \notin A \setminus B$ thì $x \notin A$ hoặc $x \in A \cap B$. Trong cả hai trường hợp ta đều có :

$$\chi_A(x)\,[1 - \chi_B(x)] = 0.$$

41. a) Giả sử $f(m) = f(m')$. Thế thì

$$am - E(am) = am' - E(am'),$$

$$a(m' - m) = E(am') - E(am).$$

Nếu $m' - m \neq 0$ thì $a = \dfrac{E(am') - E(am)}{m' - m}$ là một số hữu tỷ trái giả thiết. Vậy $f(m) = f(m')$ kéo theo $m = m'$, tức là f là một đơn ánh.

b) Giả sử $y_1, y_2 \in f(Z)$ và giả sử $y_1 < y_2$. Ta có

$$y_1 = am_1 - E(am_1),\ y_2 = am_2 - E(am_2) \text{ do đó}$$

$$y_2 - y_1 = a(m_2 - m_1) - [E(am_2) - E(am_1)].$$

Hiệu $y_2 - y_1$ nằm trong đoạn $[0, 1]$, do đó $E(am_2) - E(am_1)$ là số nguyên lớn nhất bé hơn hoặc bằng $a(m_2 - m_1)$, nghĩa là

$E[a(m_2 - m_1)] = E(am_2) - E(am_1)$, do đó

$y_2 - y_1 = a(m_2 - m_1) - E[a(m_2 - m_1)] = f(m_2 - m_1)$.

Vậy $y_2 - y_1 \in f(Z)$.

c) Nếu đoạn $[0, \varepsilon]$ không chứa phần tử nào thuộc $f(Z)$ thì theo câu b) hiệu của hai phần tử bất kỳ thuộc $f(Z)$ sẽ lớn hơn ε. Lúc đó tập $f(Z)$ chứa trong đoạn $[0, 1]$ sẽ chỉ chứa một số hữu hạn phần tử là điều không thể được vì tập Z vô hạn mà f là một đơn ánh.

Vì a vô tỷ nên $f(m) \neq 0$; do đó ta có thể xây dựng một dãy vô hạn phần tử $f(m)$ nằm trong đoạn $[0, \varepsilon]$ như sau. Ta đã chứng tỏ $[0, \varepsilon]$ chứa ít nhất một phần tử $y \in f(Z)$. Giả sử ta đã tìm được n phần tử $y_1, \dots, y_n \in [0, \varepsilon] \cap f(Z)$. Thế thì ta chọn số $\varepsilon_n < y_i$, $i = 1, \dots, n$ (chọn được vì mọi $y_i > 0$). Ta biết đoạn $[0, \varepsilon_n]$ chứa ít nhất một phần tử $y_{n+1} \in f(Z)$, mà theo cách xây dựng đó $y_{n+1} \neq y_i$, $i = 1, \dots, n$.

Nếu ký hiệu q là số nguyên sao cho $f(q) \in [0, \varepsilon_n]$, còn p là số nguyên $E(aq)$, thì ta có $0 < aq - p < \varepsilon$, do đó

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| < \frac{\varepsilon}{|q|}.$$

Thay thế p và q bởi p — và $-q$ nếu cần, ta sẽ được kết quả cần chứng minh.

42. a) Ta chứng minh bằng quy nạp theo m rằng có n^m ánh xạ từ tập E có m phần tử tới tập F có n phần tử. Nếu $m = 1$ thì ta có n ánh xạ từ E tới F ứng với n ảnh khác nhau thuộc F của phần tử duy nhất thuộc E. Giả sử ta đã chứng minh cho mọi tập gồm $m - 1$ phần tử, và giả sử $E = \{a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m\}$. Thế thì $E = E_1 \cup E_2$.

$E_1 = \{a_1, \ldots, a_{m-1}\}$, $E_2 = \{a_m\}$. Ánh xạ $f : E \to F$ được xác định bởi những cái thu hẹp f_1 và f_2 của nó trên E_1 và E_2 tương ứng ; hơn nữa hai cặp khác nhau (f_1, f_2) và (f'_1, f'_2) ứng với các ánh xạ f và f' khác nhau. Do đó số các ánh xạ từ E tới F bằng số các cặp khác nhau (f_1, f_2) ; số này bằng tích của số các ánh xạ từ E_1 tới F nhân với số các ánh xạ từ E_2 tới F, tức là bằng $n^{m-1} \cdot n = n^m$.

b) Nếu có đơn ánh từ E tới F thì rõ ràng phải có $m \leqslant n$. Ta chứng minh bằng quy nạp theo m rằng số các đơn ánh từ E tới F bằng $n(n-1) \ldots (n-m+1)$. Nếu $m = 1$ thì điều đó là hiển nhiên. Giả sử ta đã chứng minh cho trường hợp E gồm $m-1$ phần tử. Giả sử $E = \{a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m\} = E_1 \cup E_2$, trong đó $E_1 = \{a_1, \ldots, a_{m-1}\}$, $E_2 = \{a_m\}$. Cái thu hẹp f_1 của một đơn ánh $f : E \to F$ trên E_1 là một đơn ánh từ E_1 tới F, và theo giả thiết quy nạp số các đơn ánh f_1 đó bằng $n(n-1) \ldots (n-m+2)$. Nhưng với mỗi f_1 đó ảnh $f(a_m)$ của phần tử a_m có thể chọn tùy ý trong tập $F \setminus f_1(E_1)$, tức là trong tập gồm $n-(m-1)$ phần tử. Vậy mỗi f_1 ứng với $n-(m-1)$ đơn ánh f khác nhau và các ánh xạ f_1 khác nhau ứng với các ánh xạ f khác nhau, do đó số đơn ánh từ E tới F bằng :

$$n(n-1) \ldots (n-m+2)(n-m+1)$$

43. a) Mỗi $f \in \mathrm{Hom}(E, F)$ ta đặt tương ứng với họ $(f(x))_{x \in E}$, $f(x) \in F$. Như vậy ta lập được một ánh xạ φ : $\mathrm{Hom}(E, F) \to F^E$. Nếu $f_1 \neq f_2$ thì tồn tại ít nhất một $x \in E$ sao cho $f_1(x) \neq f_2(x)$, do đó họ $(f_1(x))_{x \in E}$ khác họ $(f_2(x))_{x \in E}$. Vậy φ là một đơn ánh.

Mặt khác với mỗi họ $(x_\alpha)_{\alpha \in E}$ các phần tử $x_\alpha \in F$ tồn tại một ánh xạ $f : E \to F$ sao cho $f(\alpha) = x_\alpha$ với mọi $\alpha \in E$. Vậy φ là một toàn ánh.

b) Giả sử F gồm hai phần tử 0 và 1. Ta lập ánh xạ φ từ tập $\mathcal{P}(E)$ tới tập Hom(E, F) như sau: với mỗi tập con $A \subset E$ lấy $\varphi(A)$ là hàm đặc trưng χ_A của tập A. Nếu $A \subset E$, $B \subset E$, $A \neq B$ thì rõ ràng $\chi_A \neq \chi_B$ nên φ là một đơn ánh. Mặt khác với mỗi $f \in$ Hom(E, F) xét tập con A của E mà

$$A = \{a \in E : f(a) = 1\}.$$

thì rõ ràng $f = \chi_A$. Vậy φ là một toàn ánh.

Như vậy φ là một song ánh và φ^{-1} là song ánh cần tìm từ Hom(E, F) tới $\mathcal{P}(E)$.

c) Theo bài 42 nếu F có 2 phần tử thì Hom(E, F) có 2^n phần tử do đó theo câu b) ta có $\mathcal{P}(E)$ có 2^n phần tử.

44. a) Nếu $|A_1| = |A|$ thì tồn tại một song ánh từ A_1 tới A. Do đó nếu tồn tại một đơn ánh từ A tới B thì cũng tồn tại một đơn ánh từ A_1 tới B. Vậy quan hệ $\leqslant$ đó không phụ thuộc việc chọn A và B. Rõ ràng quan hệ $\leqslant$ có tính chất phản xạ và bắc cầu. Tính chất phản đối xứng của quan hệ $\leqslant$ suy từ bài tập 39. Vậy $\leqslant$ là một quan hệ thứ tự, hơn nữa là một quan hệ thứ tự toàn phần vì theo bài 37, với hai tập A và B có ít nhất một trong hai khả năng sau đây xảy ra: có một đơn ánh từ A tới B hoặc có một đơn ánh từ B tới A, do đó hoặc $|A| \leqslant |B|$ hoặc $|B| \leqslant |A|$.

b) Nếu đặt tương ứng mỗi phần tử $a \in A$ với tập con $\{a\}$ của tập A thì ta được một đơn ánh từ A tới $\mathcal{P}(A)$. Vì vậy $|A| \leqslant |\mathcal{P}(A)|$. Giả sử tồn tại một song ánh φ từ A tới $\mathcal{P}(A)$ và giả sử

$$M = \{a \in A \mid a \notin \varphi(a)\}.$$

M là một tập con của tập A, tức là $M \in \mathcal{P}(A)$. Do đó phải tồn tại phần tử $m \in A$ sao cho $\varphi(m) = M$. Ta đi đến mâu thuẫn: nếu $m \in M$ thì $m \notin \varphi(m) = M$, còn nếu $m \notin M$ thì $m \in \varphi(m) = M$.

45. c) Giả sử $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$, $\gamma = |C|$ và $B \cap C = \emptyset$.

Thế thì $\alpha^\beta = |A^B|$, $\alpha^\gamma = |A^C|$, $(\alpha^\beta)\cdot(\alpha^\gamma) = |A^B \times A^C|$ và $\alpha^{\beta+\gamma} = |A^{B\cup C}|$.

Ta lập ánh xạ $\varphi : A^B \times A^C \to A^{B\cup C}$ như sau :

Với $f_B \in A^B$, $f_C \in A^C$ thì $\varphi(f_B, f_C) = f \in A^{B\cup C}$ xác định như sau :

$$f(x) = \begin{cases} f_B(x) & \text{nếu } x \in B, \\ f_C(x) & \text{nếu } x \in C. \end{cases}$$

Vì $B \cap C = \emptyset$ nên f là xác định và f_B, f_C chính là những cái thu hẹp của f trên B và C tương ứng.

Do đó với mỗi cặp (f_B, f_C) thì f xác định duy nhất và ngược lại mỗi f đã cho thì f_B, f_C xác định duy nhất, nghĩa là φ là một song ánh, và

$$(\alpha^\beta)(\alpha^\gamma) = \alpha^{\beta+\gamma}.$$

Các đẳng thức còn lại cũng chứng minh tương tự.

d) Theo bài 43, tồn tại song ánh từ Hom (A, B) tới $\mathcal{P}(A)$, trong đó B là tập có hai phần tử. Ta biết Hom $(A, B) = |B^A| = 2^\alpha$. Vậy $|\mathcal{P}(A)| = 2^\alpha$ với $\alpha = |A|$.

46. a) Tập $\{1\}$ là tập hữu hạn vì tập con thực sự duy nhất của nó là tập rỗng. Giả sử tập $A = \{1, 2, ..., k\}$ là một tập hữu hạn. Ta xét tập $B = \{1, 2, ..., k+1\}$. Giả sử có một song ánh $f : B \to C$, trong đó C là một tập con thực sự của B. Vì A là một tập hữu hạn và cái thu hẹp của f trên A cũng là một song ánh, nên phải tồn tại $s \in A$ để $f(s) = k + 1$, nghĩa là $k + 1 \in C$, mặt khác phải có $f(k+1) = t \in A$. Lập ánh xạ

$f^*: A \to N \setminus \{k+1\}$ như sau :

$$f^*(p) = \begin{cases} f(p) \text{ nếu } p \neq s, \\ m \text{ nếu } p = s. \end{cases}$$

Thế thì f^* là một song ánh, trái giả thiết A là một tập hữu hạn. Vậy $B = \{1, ..., k+1\}$ là một tập hữu hạn.

b) $f(n) = n + 1$, $n \in N$ là một song ánh từ N tới tập con thực sự của nó.

c) Giả sử A là một tập vô hạn. Lấy một phần tử $a_1 \in A$ thì $A_1 = A \setminus \{a_1\} \neq \varnothing$ vì nếu trái lại thì A là một tập hữu hạn. Lấy $a_2 \in A_1$ thì $A_2 = A_1 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing$ và lập luận tương tự ta có dãy $\{a_n\}$, $n = 1, 2, ...$ các phần tử khác nhau của A, chính là một tập con đếm được của A.

47. a) Trước hết ta chứng minh $\aleph_0^2 = \aleph_0$. Theo định nghĩa $\aleph_0^2 = |N \times N|$, trong đó N là tập các số tự nhiên. Các phần tử của $N \times N$ có thể sắp thứ tự như sau :

$(i, j) < (k, l)$ nếu $i + j < k + l$ hoặc $i + j = k + l$ và $i < k$.

Ta có $(0,0) < (0,1) < (1,0) < (0,2) < (1,1) < (2,0) <$
$< (0,3) < (1,2) < ....$

Do đó ta có thể đánh số tất cả các phần tử của tập $N \times N$, nghĩa là

$$\aleph_0^2 = |N \times N| = \aleph_0.$$

Từ đó bằng quy nạp ta chứng minh được $\aleph_0^n = \aleph_0$.
Mặt khác với mọi $n \geq 1$, ta có

$$\aleph_0 \leqslant n\aleph_0 \leqslant |N \times N| = \aleph_0,$$

do đó $n\aleph_0 = \aleph_0$.

b) Ký hiệu N là tập các số tự nhiên, $N = \{0, 1, 2, ...\}$, và $-N = \{0, -1, -2, ...\}$ thì $Z = N \cup -N$, do đó $\aleph_0 =$
$|N| \leqslant |Z| \leqslant |N| + |-N| = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

c) Ta đặt tương ứng mỗi số hữu tỷ $\frac{p}{q} \in Q$ với cặp $(p, q) \in Z \times Z$. Rõ ràng đó là một đơn ánh từ Q tới $Z \times Z$, do đó

$$\aleph_0 = |Z| \leqslant |Q| \leqslant |Z \times Z| = \aleph_0^2 = \aleph_0.$$

Vậy $$|Q| = \aleph_0.$$

48. a) Giả sử $\alpha = |A|$. Theo bài 46, tập vô hạn A chứa một tập con đếm được A_1. Đặt $A_2 = A \setminus A_1$. Thế thì

$$\alpha + \aleph_0 = |A| + \aleph_0 = |A_1| + |A_2| + \aleph_0 =$$
$$= |A_2| + \aleph_0 + \aleph_0 = |A_2| + \aleph_0 = |A_2| +$$
$$+ |A_1| = |A_2 \cup A_1| = |A| = \alpha.$$

b) Giả sử $\alpha = |A|$ và A_1 là một tập con đếm được của tập A. Theo bài 47, tồn tại song ánh φ_0 từ A_1 lên $A_1 \times A_1$. Giả sử $\mathcal{T}$ là tập tất cả các cặp (X, φ), trong đó $A \supset X \supset A_1$, φ là song ánh từ X lên $X \times X$ trùng với φ_0 trên A_1. Giả sử $\mathcal{B}$ là một tập con sắp thứ tự toàn phần của $\mathcal{T}$, $B = \bigcup_{X \in \mathcal{B}} X$ và $\psi : B \to B \times B$ sao cho $\psi|_X = \varphi$. Dễ thấy rằng ψ là một song ánh và (B, ψ) là cận trên của tập $\mathcal{B}$. Do đó theo bổ đề Zoóc $\mathcal{T}$ có phần tử tối đại (F, f). Nếu ta chứng minh được $|F| = \alpha$ thì sẽ có $\alpha^2 = \alpha$.

Giả sử $|F| = \beta < \alpha$ thì $\beta^2 = \beta$, do đó

$$\beta \leqslant 2\beta \leqslant 3\beta \leqslant \beta^2 = \beta.$$

Vậy $2\beta = \beta$ và $3\beta = \beta$. Từ giả thiết $\beta < \alpha$ suy ra $|A \setminus F| > \beta$ vì nếu trái lại thì ta có $\alpha = |A| \leqslant 2\beta = \beta$. Do đó tồn tại $E \subseteq A \setminus F$ sao cho $|E| = |F|$. Ta đặt $G = E \cup F$ và chứng tỏ rằng tồn tại song ánh $g : G \to G \times G$ trùng với f trên F. Thật vậy,

$$G \times G = (F \times F) \cup (F \times E) \cup (E \times F) \cup (E \times E)$$

là hợp của bốn tập rời nhau: mặt khác vì $|E| = |F|$ nên

$$|E \times E| = |E \times F| = |E \times E| = |F \times F| = \\ = \beta^2 = \beta.$$

do đó $|(F \times E) \cup (E \times F) \cup (E \times E)| = 3\beta = \beta.$

Như vậy tồn tại song ánh $f_1 : E' \to (F \times E) \cup (E \times F) \cup (E \times E)$, và ánh xạ $g : G \to G \times G$ trùng với f_1 trên E và trùng với f trên F sẽ là song ánh cần tìm, trái với tính tối đại của cặp (F, f). Như vậy ta đã chứng minh được $\alpha^2 = \alpha$. Bằng quy nạp ta có $\alpha^n = \alpha$ với mọi số tự nhiên $n > 1$.

c) Theo bài 37, ta có thể giả sử chẳng hạn $\beta \leqslant \alpha$. Lúc đó $\alpha \leqslant \alpha\beta \leqslant \alpha^2 = \alpha$, nghĩa là $\alpha\beta = \alpha$. Mặt khác $\alpha \leqslant \alpha + \beta \leqslant \alpha + \alpha = \alpha$, nghĩa là $\alpha + \beta = \alpha$.

49.-a) Giả sử $\alpha = |E|$. Với mỗi số tự nhiên n ta ký hiệu $\mathcal{F}_n$ là tập tất cả các tập con của tập E có n phần tử. Với mỗi $X \in \mathcal{F}_n$ tồn tại một song ánh từ tập $A = \{1, 2, ..., n\}$ tới X, do đó $|\mathcal{F}_n| \leqslant$ lực lượng của tập các ánh xạ từ tập A tới tập E, mà lực lượng của tập cuối cùng này bằng lực lượng của tập E^n. Vậy $|\mathcal{F}_n| \leqslant |E^n| = \alpha^n = \alpha$. Do đó

$$|\mathcal{F}(E)| = \sum_{n \in N} |\mathcal{F}_n| \leqslant \alpha \cdot \aleph_0 = \alpha.$$

Mặt khác

$$\alpha \leqslant |\mathcal{F}(E)|$$

vì $x \mapsto \{x\}$ là một đơn ánh từ E tới $\mathcal{F}(E)$.

Vậy $|\mathcal{F}(E)| = |E| = \alpha$

b) S là hợp của các tập E^I, trong đó I chạy qua tập $\mathcal{F}(N)$ tất cả các tập con hữu hạn của tập N các số tự

nhiên. Theo câu a) $|\mathcal{F}(N)| = |N| = \aleph$, mặt khác với mỗi $f \in \mathcal{F}(N)$, ta có $|E^f| = |E|$. Do đó

$$|E| \leqslant |S| \leqslant |E| \cdot \aleph_0 = |E|.$$

c) Vì $|E| = |E \times N|$, trong đó N là tập số tự nhiên, do đó có một song ánh $\varphi : E \times N \to E$. Với mỗi $y \in E$ ký hiệu $X_y = \{\varphi(y, n) \mid n \in N\}$, thì $(X_y)_{y \in E}$ chính là sự chia lớp tập E, trong đó $|X_y| = \aleph_0$.

50. a) Theo bài 48, lực lượng của đoạn $[0, 1]$ bằng lực lượng của khoảng $(0, 1)$, còn lực lượng của khoảng $(0, 1)$ bằng $\aleph$ vì có song ánh sau đây từ $(0, 1)$ tới R : $x \mapsto \pi \cot g (\pi x)$.

b) Tập các số thực trên khoảng $[0, 1)$, tức là các số thực $0 \leqslant x < 1$ có lực lượng $\aleph$. Mặt khác mỗi số thực $\in [0, 1)$ biểu diễn được theo cách viết thập phân dưới dạng :

$$x = 0, a_0 a_1 \dots a_n \dots$$

trong đó với mỗi $n \in N$, a_n có thể nhận một trong các giá trị 0, 1, ..., 9. Vậy mỗi $x \in [0, 1)$ ứng với một dãy

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad (1)$$

mà tập các dãy dạng (1) là $\{0, 1, \dots, 9\}^N$.

Nếu trong dãy dạng (1) mỗi a_n chỉ nhận một trong hai giá trị 0 và 1 thì dãy đó cũng ứng với một số thực của $[0, 1)$. Do đó

$$|\{0, 1\}^N| \leqslant |[0, 1]| \leqslant |\{0, 1, \dots, 9\}^N|,$$

nghĩa là

$$2^{\aleph_0} \leqslant \aleph \leqslant 10^{\aleph_0} \leqslant (2^4)^{\aleph_0} = 2^{4\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

Vậy

$$\aleph = 2^{\aleph_0}.$$

51. a) Giả sử A là một tập sắp thứ tự tốt, $a \in A$ và φ là ánh xạ đẳng cấu từ A lên đoạn $P_a = \{x \in A \mid x < a\}$. Thế thì $\varphi(a) < a$.

Trong tập các phần tử x của A có tính chất $\varphi(x) < x$ giả sử b là phần tử bé nhất, và giả sử $\varphi(b) = c < b$. Ta có $\varphi(c) < \varphi(b) = c$, mâu thuẫn với giả thiết b là phần tử bé nhất có tính chất đó.

b) Rõ ràng $\alpha \leqslant \alpha$ và nếu $\alpha \leqslant \beta$, $\beta \leqslant \gamma$ thì $\alpha \leqslant \gamma$. Giả sử $\alpha \leqslant \beta$ và $\beta \leqslant \alpha$. Nếu $\alpha \neq \beta$ thì theo tính chất bắc cầu vừa chứng minh, ta có $\alpha < \alpha$, nhưng theo câu a) ở trên điều này không xảy ra.

52. a) Giả sử $\beta, \gamma \in W(\alpha)$ và $\alpha = 0(A)$, $\beta = 0(B)$, $\gamma = 0(C)$. Vì $\beta < \alpha$ và $\gamma < \alpha$ nên tồn tại $b, c \in A$ để $B \cong P_b$, $C_c \cong P_c$. Hai phần tử $b, c \in A$ so sánh với nhau được, nên chẳng hạn nếu $b < c$ thì $\beta < \gamma$.

Ta chứng minh $A \cong W(\alpha)$. Với mỗi phần tử $b \in A$ tự số $\beta = 0(P_b)$ thuộc $W(\alpha)$, và ánh xạ $f: A \to W(\alpha)$ mà $f(b) = \beta$ rõ ràng là một đẳng cấu. Vậy $\alpha = 0(W(\alpha))$.

b) Giả sử $A = W(\alpha)$, $B = W(\beta)$, $D = A \cap B$, $\delta = 0(D)$. Vì D là một tập sắp thứ tự tốt nên δ là một tự số. Ta chứng minh $\delta \leqslant \alpha$.

Nếu $D = A$ thì $\delta = \alpha$. Giả sử $D \neq A$, ta chứng minh D là một đoạn của A, nghĩa là $\delta < \alpha$. Thật vậy, giả sử $\xi \in D$ và $\eta \in A \setminus D$ thì hoặc $\xi < \eta$ hoặc $\eta < \xi$. Trường hợp $\eta < \xi$ không xảy ra vì nếu vậy thì $\eta < \xi < \alpha$ và $\eta < \xi < \beta$, do đó $\eta \in D$ mâu thuẫn. Vậy $\xi < \eta$. Lấy η là phần tử bé nhất trong tập $A \setminus D$ ta được $D = W(\eta)$ nghĩa là D là một đoạn. Vì $\eta = 0(W(\eta)) = 0(D) = \delta$ nên $D = W(\delta)$.

Vậy $\delta \leqslant \alpha$ và $\delta \leqslant \beta$. Khả năng $\delta < \alpha$, $\delta < \beta$ không thể xảy ra đồng thời vì $\delta \notin D = W(\delta)$. Vì vậy $\delta = \alpha$ hoặc $\delta = \beta$. Nếu $\delta = \alpha$ và $\delta < \beta$ thì $\alpha < \beta$, còn nếu $\delta = \beta$ và $\delta < \alpha$ thì $\beta < \alpha$.

c) Giả sử $\alpha \in W$. Nếu α không phải là phần tử bé nhất của W thì ta xét $W \cap W(\alpha) = D$. Vì D là một tập con của tập sắp thứ tự tốt $W(\alpha)$ nên D có phần tử bé nhất là β. Ta chứng minh β là phần tử bé nhất của W. Thật vậy, giả sử $\gamma \in W$. Nếu $\alpha \leqslant \gamma$ thì $\beta \leqslant \gamma$, còn nếu $\gamma < \alpha$ thì $\gamma \in W \cap W(\alpha) = D$, do đó $\beta \leqslant \gamma$.

d) Với mỗi bản số α thuộc tập A ta đặt tương ứng với một tự số nào đó có lực lượng α. Rõ ràng đây là một đẳng cấu từ tập A lên một tập các tự số, do đó A cũng là một tập sắp thứ tự tốt.

53. a) $1 + \omega$ là tự số của hợp $\{1\} \cup \{2, 3, ...\}$ sắp thứ tự theo thứ tự tự nhiên $1 < 2 < 3 < ...$ Do đó $1 + \omega = \omega$.

b) $\omega + 1$ là tự số của tập $\{a_1, a_2, ..., b_1\}$, trong đó $a_1 < a_2 < ... < b_1$. Vì tập này có phần tử lớn nhất là b_1 nên $\omega + 1 \neq \omega$. Tương tự $\omega + 2 \neq \omega$ và $\omega + 2 \neq \omega + 1$....

54. a) 2ω là tự số của tập các cặp $\{(n, 1), (n, 2)\}$ $n = 1, 2, ...$ sắp theo thứ tự :

$$(1, 1) < (1, 2) < (2, 1) < (2, 2) < (3, 1) < (3, 2) < (4, 1) < ...$$

Đó chính là tự số của tập số tự nhiên, do đó $2\omega = \omega$ Mặt khác $\omega 2$ là tự số của tập các cặp $\{(1, n), (2, n)\}$, $n = 1, 2, ...$ sắp theo thứ tự :

$(1, 1) < (1, 2) < (1, 3) < ... < (2, 1) < (2, 2) < (2, 3) < ...$
Đó là tự số $\omega + \omega$, vậy $\omega 2 = \omega + \omega$.

b) Giả sử $\alpha = 0(A)$, $\beta = 0(B)$. Thế thì $\alpha\beta$ là tự số của tập $B \times A$ sắp thứ tự theo lối từ điển. Vì $\xi < \alpha\beta$ nên ξ là tự số của một đoạn $P_{(b, a)}$ gồm các cặp bé hơn cặp (b, a), tức là các cặp (y, x), $y \in B$, $x \in A$ sao cho hoặc $y < b$ hoặc $y = b$ và $x < a$. Ký hiệu P_a, P_b là các đoạn của các

tập sắp thứ tự tốt A, B ứng với các phần tử a, b tương ứng. Nếu $\zeta = 0(P_a)$, $\eta = 0(P_b)$ thì $\xi = \alpha\eta + \zeta$ vì

$$P_{(b,a)} = (P_b \times A) \cup (\{b\} \times P_a).$$

c) Nếu trong câu (b) ta lấy $\beta = \xi + 1$, thì $\xi < \alpha\beta$, do đó tồn tại các $\zeta < \alpha$ và η thỏa mãn

$$\xi = \alpha\eta + \zeta.$$

CHƯƠNG II

ĐỊNH THỨC VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

55. a) 0.

b) $n!$

c) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

d) $n!$

56. a) Giả sử $D = a + bi$. Thay mỗi phần tử trong D bởi số phức liên hợp với nó, ta có $D' = a - bi$. Mặt khác thực hiện phép chuyển vị D ta được D'. Vậy $D = D'$, tức là $a + bi = a - bi$. Vậy $b = 0$ và D là một số thực.

b) Nhân mỗi hàng của định thức D đã cho với -1, ta được $(-1)^n D = D$, tức là $D - (-1)^n D = 0$. Khi n lẻ ta có $D = 0$.

57. a) Định thức được nhân lên với $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

b) Định thức không đổi. Áp dụng câu trên hai lần.

c) Định thức được nhân với $(-1)^n$.

d) Định thức không đổi.

e) Gọi D là định thức đã cho, D_1 là định thức đã biến đổi, ta có

$$D_1 = (-1)^{n-1} D + D.$$

Vậy $D_1 = 0$ nếu n chẵn.

$D_2 = 2D$ nếu n lẻ.

58. a) Nhân cột đầu với -1, cộng vào các cột sau. Khai triển định thức thu được thành tổng, rút thừa số chung, nhận xét các cột giống nhau. Vậy $D = 0$.

b) Cộng cột 2 và cột 3 vào cột đầu. Rút thừa số chung $a + b + c$. Kết quả $D = 0$.

c) Cộng cột cuối vào cột đầu : $D = 0$.

d) Nhân cột đầu với -1, cộng vào cột cuối. Chú ý rằng $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$. Vậy $D = 0$.

e) Cộng cột hai vào cột đầu, dùng công thức cộng cung : $D = 0$.

f) Cộng cột hai vào cột đầu : $D = 0$.

g) Nhân cột đầu với a, cột hai với b rồi cộng cột đầu vào cột hai : $D = 0$.

h) Nhân cột ba với 2 rồi cộng vào cột hai : $D = 0$.

59. a) Chú ý rằng nếu thay x bởi a_1 thì định thức có hai hàng giống nhau nên bằng 0.

Nghiệm của phương trình là

$$x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_{n-1} = a_{n-1}.$$

b) Nghiệm của phương trình là

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, \ldots, x_{n-1} = n - 2.$$

c) $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_{n-1} = a_{n-1}$.

60. a), b), c) Khai triển định thức thành tổng.

d) Nhân hàng đầu với -1 rồi cộng vào hàng hai và hàng ba. Trong định thức nhận được, rút thừa số chung $(b-a)(c-a)$ ra ngoài định thức.

e) Tương tự câu trên.

f) Tương tự hai câu trên, nhưng đối với các cột.

61. a) 48.

b) 160.

c) 394.

d) Khai triển theo hàng một, ta có $D_5 = 5D_4 - 6D_3$. Đối với D_4 và D_3 ta cũng có các công thức dạng đó. Vì vậy

$$D_5 = 65D_2 - 114D_1 = 665.$$

e) Cộng hai hàng sau vào hàng một, rút thừa số chung $a+b+c$. Nhân cột một với -1 rồi cộng vào hai cột sau :

$$D = (a+b+c)^3.$$

f) Nhân hàng cuối với -1 rồi cộng lần lượt vào hàng một và hàng hai. Khai triển định thức nhận được theo cột một :

$$D = 2abc\,(a+b+c)^3.$$

g) Nhân cột một với -1 rồi cộng vào các cột sau. Áp dụng công thức $1-\cos 2a = 2\sin^2 a$. Rút thừa số chung ra ngoài dấu định thức rồi khai triển theo cột một ta được

$$D = -16\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{c}{2}.$$

62. Dùng phương pháp đưa về dạng tam giác.

a) Lấy hàng một cộng vào tất cả các hàng dưới ta được định thức dạng tam giác :

$$D = n!$$

b) Nhân hàng đầu với -1 rồi cộng vào tất cả các hàng dưới, ta được

$$D = b_1 b_2 \dots b_n.$$

c) Nhân hàng đầu với -1 rồi cộng tất cả vào hàng dưới, ta được định thức dạng tam giác:

$$D = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n).$$

d) Nhân hàng đầu với -1 rồi cộng vào tất cả các hàng dưới, ta được

$$D = (n-1)!$$

63. a) Cộng tất cả các cột vào cột đầu. Rút thừa số chung $x + (n-1)a$ ra ngoài định thức. Trong định thức mới, nhân hàng đầu với -1 rồi cộng vào tất cả các hàng sau ta được

$$D = [x + (n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

b) Gọi định thức đã cho là Δ. Nhân hàng một và cột một với x, ta được định thức

$$D = x^2 . \Delta. \text{ Vậy } \Delta = \frac{1}{x^2} D.$$

Tính D theo phương pháp của câu trên, ta được

$$\Delta = (-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}.$$

c) Lấy mỗi hàng, kể từ hàng thứ hai, trừ cho hàng đứng trước nó. Trong định thức nhận được, cộng cột đầu vào mỗi cột kia. Khai triển theo cột cuối. Ta được

$$D = (-1)^{n+1}(n+1)2^{n-2}.$$

d) Khai triển định thức theo cột đầu:

$$D = x^n + (-1)^{n+1} y^n.$$

64. a) Nhân cột hai, bốn, sáu,... với -1, cột 3, 5, 7,... với $+1$, rồi cộng tất cả vào cột đầu, với chú ý rằng

$$1 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} +$$
$$+ (-1)^n C_n^n = 0.$$

Rút thừa số chung $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n$ ra ngoài định thức. Cuối cùng chú ý rằng $C_k^k = 1$. Ta được

$$D = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot [a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n].$$

b) Lấy mỗi cột, kể từ cột thứ hai, trừ đi cột đứng trước nó. Chú ý rằng $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$, biến đổi các phần tử của định thức. Trong định thức mới, lấy mỗi hàng trừ cho hàng đứng trên nó, biến đổi các phần tử của định thức theo công thức tổ hợp nói trên, ta được $D_n = D_{n-1}$. Vậy

$$D_n = D_{n-1} = \dots = D_1 = 1.$$

c) Trừ mỗi hàng cho hàng trên nó rồi áp dụng công thức

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k \text{ , ta thấy}$$

$$D_n = D_{n-1} = \dots = D_1 = 1.$$

d) Trừ mỗi hàng cho hàng trên nó, áp dụng công thức

$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$, ta được $D_{n+1} = (x - 1) D_n$.

Vậy $D_{n+1} = (x - 1)^n$.

65. a) Khai triển định thức theo hàng một. Trong định thức mới nhận được, thực hiện $n - 2$ phép đổi chỗ các hàng để đưa hàng cuối lên hàng đầu, ta được

$$D_n = a_1 a_2 \dots a_{n-1} - D_{n-1}.$$

Bằng phương pháp truy toán, ta tính được

$$D_n = a_1 a_2 \dots a_{n-1} - a_1 a_2 \dots a_{n-2} + \dots + (-1)^n a_1 + \\ + (-1)^{n+1}$$

b) Viết $2\cos\theta$ dưới dạng $(\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos\theta - i\sin\theta)$ với $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta) = 1$, khai triển định thức thành tổng. Dùng phương pháp truy toán. Cuối cùng ta được

$$D_n = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1} - (\cos\theta - i\sin\theta)^{n+1}}{2i\sin\theta} =$$

$$= \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

c) Khai triển định thức theo cột đầu rồi áp dụng kết quả của câu trên, ta được

$$D_n = \cos\theta \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin(n-1)\theta}{\sin\theta} =$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} (\cos\theta \sin n\theta - \sin n\theta \cos\theta + \cos n\theta \sin\theta),$$

$$D_n = \cos n\theta$$

d) Khai triển theo hàng đầu, ta được

$$D_n = xD_{n-1} - D_{n-2}$$

Tính D_4, D_5 chẳng hạn. Dùng phương pháp quy nạp tìm được

$$D_n = x^n - C^1_{n-2}\, x^{n-2} + C^2_{n-3}\, x^{n-4} - \dots$$

66. Dùng phương pháp rút thừa số chung.

a) Cộng tất cả các cột vào cột đầu, rút thừa số chung $\frac{n(n-1)}{2} h + na$ ra ngoài định thức. Trong định thức mới nhận được, lấy mỗi hàng trừ cho hàng trên nó

Khai triển định thức nhận được theo cột một, rồi rút nhân tử chung h ở cả n cột ra ngoài định thức.

Cuối cùng tính riêng định thức mới nhận được bằng cách cộng tất cả các cột vào cột cuối rồi lấy mỗi hàng trừ cho hàng trên nó :

$$D_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (nh)^{n-1}\left[a + \frac{h(n-1)}{2}\right].$$

b) Cộng tất cả các cột vào cột đầu, rút thừa số chung $x + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ của cột một ra ngoài định thức. Nhận xét rằng định thức mới nhận được sẽ triệt tiêu nếu ta lần lượt thay x bởi $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tức là định thức chia hết cho $x - a_1, x - a_2, \ldots, x - a_n$, mà hệ số của x^{n+1} trong D_{n+1} là 1.

Vậy $D_{n+1} = (x + a_1 + \ldots + a_n)(x - a_1) \ldots (x - a_n)$.

67. Đưa về định thức Vandéc — Mông.

a) $$D_n = \prod_{1 \leqslant i < k \leqslant n} (\cos\varphi_i - \cos\varphi_k) =$$

$$= 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leqslant i < k \leqslant n} \sin\frac{\varphi_i + \varphi_k}{2} \prod_{1 \leqslant i < k \leqslant n} \times \sin\frac{\varphi_k - \varphi_i}{2}.$$

b) $$2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{n \geqslant i > k \geqslant 1} \cos\frac{\varphi_i + \varphi_k}{2} \prod_{n \geqslant i > k \geqslant 1} \times \sin\frac{\varphi_i - \varphi_k}{2}.$$

c) $D = 1!\ 2!\ 3! \dots n!$

d) $D = \prod_{n+1 \geqslant k > i \geqslant 1} (a_i - a_k)$.

e) Lập định thức Δ cấp $n+1$ bằng cách thêm vào D cột cuối gồm $1, z, z^2, \dots, z^{n-1}, z^n$ và thêm vào hàng thứ n (trước hàng cuối) $x_1^{n-1}, x_2^{n-1}, \dots, x_n^{n-1}, z^{n-1}$. Khi đó Δ là định thức Vanđec — Mông nên

$$\Delta = \prod_{n \geqslant i > k \geqslant 1} (x_i - x_k) \prod_{i=1}^{n} (z - x_i).$$

Định thức D chính là định thức con ứng với phần tử z^{n-1} trong định thức Δ. Vậy

$$D = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \prod_{n \geqslant i > k \geqslant 1} (x_i - x_k).$$

68. Dùng định lý Laplaxơ.

a) 10.

b) $abc - x(bc + ca + ab)$.

c) $(x_2 - x_1) \sin(\gamma - \beta) + (y_2 - y_1) \sin(\alpha - \gamma) + (z_2 - z_1) \sin(\beta - \alpha)$.

d) $(a_1 a_2 - b_1 b_2)(c_1 c_2 - d_1 d_2)$.

e) $(x_4 - x_3)[(x_3 - x_2)(x_4 - x_2) - 2(x_3 - x_1) \times (x_4 - x_1)]$.

69. a) Cộng cột thứ 6 và thứ 11 vào cột một, cột thứ 7 và thứ 12 vào cột hai, ..., cộng cột thứ 10 và thứ 15 vào cột năm. Rồi cộng cột thứ 11 vào cột 6, cột thứ 12 vào cột 7, ..., cột thứ 15 vào cột 10.

Trong định thức nhận được, lấy hàng thứ 15 trừ cho hàng thứ 10, hàng thứ 14 trừ cho hàng thứ 9, ..., hàng thứ 6 trừ cho hàng thứ nhất :

$$D = 27(a+2)^3(a-1)^6\,[3(a+2)^2 - 4x^2] \times$$
$$\times\,[3(a-1)^2\ 4x^2]^2.$$

b) $(a+b+c+d)(a+b-c+d)(a-b+c-d)\times$
$$\times\,(a-b-c+d).$$

c) $a^2+b^2+c^2+d^2$.

70. a) Giả sử ngược lại rằng $D = \det A = 0$. Khi đó hệ thuần nhất

$$\sum_{s=1}^{n} a_{ks}x_s = 0 \quad (k = 1, \ldots, n)$$

có nghiệm $x = (c_1, \ldots, c_n) \neq 0$. Giả sử

$$\max\{|c_1|, \ldots, |c_n|\} = |c_j| \neq 0.$$

Từ $\sum_{s=1}^{n} a_{js}c_s = 0$ rút ra $a_{jj}c_j = -\sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{n} a_{js}c_s$

nên $|a_{jj}|\cdot|c_j| \leqslant \sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{n} |a_{js}|\cdot|c_s| \leqslant \sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{n} |a_{js}|\cdot|c_j|$,

do đó

$$|a_{jj}| \leqslant \sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{n} |a_{js}|$$

mâu thuẫn với giả thiết của đề bài.

b) Vì $|a_{11}| = 2 > 0,9 + 1$,

$$|a_{22}| = 3 > 1,2 + 1,7,$$

$$|a_{33}| = 3,5 > 2,3 + 1,1$$

nên theo câu trên, det $A \neq 0$.

c) Với $n = 2$, định lý đúng. Quy nạp theo n: giả sử định lý với $n - 1$, $n \geqslant 3$; ta chứng minh định lý đúng với n.

Trên ma trận $A = [a_{ij}]$, ta thực hiện các biến đổi sơ cấp để đưa A về dạng (vì $a_{11} \neq 0$)

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{bmatrix},$$

trong đó $B = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \ldots b_{2n} \\ . & . \quad . \quad . \quad . \\ b_{n2} & b_{n3} \ldots b_{nn} \end{bmatrix}$.

Ta chứng minh $b_{ii} > 0$ $(i = 2, \ldots, n)$ và ma trận B cũng thỏa mãn điều kiện của câu a).

Thật vậy,

$$b_{ii} = a_{ii} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1i} = \frac{a_{ii} a_{11} - a_{i1} . a_{1i}}{a_{11}} > 0$$

và theo giả thiết

$$a_{11} > \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}|$$

nên
$$\sum_{j=2}^{n} \frac{|a_{i1} a_{1j}|}{a_{11}} = \frac{|a_{i1}|}{a_{11}} \times$$
$$\times \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}| < |a_{i1}| \quad (i = 2, \ldots, n).$$

Vì vậy với $i = 2, \ldots, n$ ta có

$$\frac{a_{i1} a_{1i}}{a_{11}} + \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{n} |b_{ij}| \leqslant \frac{a_{i1} a_{1i}}{a_{11}} + \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| +$$
$$+ \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{n} \frac{|a_{i1} a_{1j}|}{a_{11}} \leqslant \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| + \sum \frac{|a_{i1} a_{1j}|}{a_{11}} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| + |a_{i1}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < a_{ii}.$$

Do đó $\sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{n} |b_{ij}| < a_{ii} - \frac{a_{i1} a_{1i}}{a_{11}} = b_{ii}$ $(i = 2, \ldots, n)$.

Theo giả thiết quy nạp, det $B > 0$ và do đó det $A > 0$.

71. Để chứng minh mệnh đề b) ta chứng minh rằng các vectơ $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ có thể viết dưới dạng $\alpha_i = a_{i1} \varepsilon_1 + a_{i2} \varepsilon_2 + \ldots + a_{in} \varepsilon_n$, trong đó $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ là cơ sở đơn vị. Sau đó chứng minh rằng khi giao hoán hai vectơ, hàm $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ đổi dấu. Để chứng minh điều

đó, chẳng hạn đối với các vectơ α_1, α_2 ta xét $f(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$.

72. a) Chứng minh rằng hàm $f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = |AB|$ của các hàng của ma trận A có các tính chất (1) và (2) và ta có $f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) = |B|$.

c) Đặt $f(\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, ..., \varepsilon_{i_n}) = 1$ với mọi $i_1, i_2, ..., i_n = 1, 2, ..., n$ (như nhau hoặc khác nhau). Theo điều kiện (1), bằng cách đặt $\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_j$, ta được

$$f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \sum_{i_1, i_2, ..., i_n = 1}^{n} a_{1, i_1} a_{2, i_2} ... a_{n, i_n}.$$

Hàm $f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ đó được xác định. Rõ ràng rằng khi giao hoán các vectơ, nó không thay đổi, tức là trong trường hợp trường đặc số 2, nó thay dấu. Vậy (2') thỏa mãn còn điều kiện (2) không thỏa mãn.

73. a) $D = D_0 + Sx$, trong đó D_0 là giá trị của định thức D khi $x = 0$, và S là tổng các phần phụ đại số của tất cả các phần tử của D_0.

b) Đặt $x = -1$ trong câu trên.

74. a) Dùng câu a) của bài trên.

b) Dùng câu a) của bài trên.

75. a) Cái « liên phân » $(a_1\ a_2 ... a_n)$ bằng tổng các tích có thể được của các phần tử $a_1, a_2, ..., a_n$ mà một trong chúng chứa tất cả các phần tử đó còn các tích khác thu được từ nó bằng cách vứt bỏ một hoặc một số cặp nhân tử với các số hiệu bên cạnh. Khi đó số hạng thu được bằng cách vứt bỏ tất cả các thừa số (khi n chẵn) được xem là bằng 1:

$(a_1 a_2 a_3 a_4) = a_1 a_2 a_3 a_4 + a_3 a_4 + a_1 a_4 + a_1 a_2 + 1.$
$(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5) = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 + a_3 a_4 a_5 + a_1 a_4 a_5 +$
$+ a_1 a_2 a_5 + a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3 + a_5.$
$(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6) = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 + a_3 a_4 a_5 a_6 +$
$+ a_1 a_4 a_5 a_6 + a_1 a_2 a_5 a_6 + a_1 a_2 a_3 a_6 + a_1 a_2 a_3 a_4 +$
$+ a_5 a_6 + a_3 a_6 + a_1 a_6 + a_3 a_4 + a_1 a_4 + a_1 a_2 + 1.$

Hướng dẫn: Thử nghiệm quy luật đó đối với liên phân số cấp 1 và cấp 2 và sau khi giả thiết các liên phân cấp $n-1$ và $n-2$ đã đúng, chứng minh quy luật đúng đối với liên phân cấp n. Muốn thế hãy rút ra hệ thức truy toán

$$(a_1 a_2 \ldots a_n) = a_n (a_1 a_2 \ldots a_{n-1}) + (a_1 a_2 \ldots a_{n-2}).$$

b) Dùng phương pháp quy nạp toán học.

76. Sử dụng mệnh đề sau: Tích của hai đa thức khác không cũng là một đa thức khác không. Từ đó chứng minh rằng nếu $D = AB$ là sự phân tích đã giả thiết và một số hạng nào đó của đa thức A chứa a_{11} thì không có số hạng B nào chứa các phần tử của hàng (cột) thứ nhất. Từ đó suy ra rằng dù $i, j = 1, 2, \ldots, n$ thế nào cũng tìm được một số hạng trong A chứa a_{ii} nhưng không có số hạng B nào chứa a_{ij}.

77. Để chứng minh câu b) chẳng hạn, ta xác định $\overline{\Delta}_{n-k}$ xuất phát từ sự đánh số các tổ hợp $t_1, t_2, \ldots, t_{C_n^k}$ chập $n-k$ của n số $1, 2, \ldots, n$ nó liên hệ với sự đánh số $s_1, s_2, \ldots, s_{C_n^k}$ xác định Δ_k sao cho t_1 chứa $n-k$ số không tham gia trong s_1. Nếu σ_i là tổng các số trong tổ hợp s_i, thì ta đưa thừa số $(-1)^{\sigma_i}$ ra khỏi hàng thứ i và cột thứ i ($i = 1, 2, \ldots, C_n^{n-k}$) của định thức $\overline{\Delta}_{n-k}$.

Để chứng minh câu d) ta dùng các đẳng thức ở câu c) và tính bất khả quy của D đã chứng minh trong bài

trên cũng như bậc của D và Δ_k đối với các phần tử a_{ij} ta chứng minh được rằng

$$\Delta_k = c \, . \, D^{C_{n-1}^{k-1}},$$

trong đó c không phụ thuộc vào các phần tử a_{ij}. Để xác định c, ta chứng minh rằng Δ_k cũng như $D^{C_{n-1}^{k-1}}$ đều chứa số hạng $(a_{11} a_{22} \dots a_{nn})^{C_{n-1}^{k-1}}$ với hệ số bằng đơn vị.

78. a) Bằng cách chứng minh rằng $Q_n = P_n^2$, ta được

$$P_n = Q_n = 1.$$

b) Chứng minh rằng $d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p_{ki} \, p_{kj} \, \varphi(k)$,

trong đó p_{ij} cũng ký hiệu như trong câu trên.

79. a) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

b) $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = -1, x_5 = 1$

c) $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = -1, x_5 = 1$

d) $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -2, x_4 = 0, x_5 = 3$.

80. a) $x = \frac{1}{4}(-a + b + c + d)$, $y = \frac{1}{4}(a - b + c + d)$;

$$z = \frac{1}{4}(a + b - c + d), \; t = \frac{1}{4}(a + b + c - d).$$

b) $x = \frac{1}{2}\left(-\frac{c - ad}{b - a} + \frac{c' - a'd}{b' - a'} + \frac{c'' - a''d}{b'' - a''}\right)$,

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{c - ad}{b - a} - \frac{c' - a'd}{b' - a'} + \frac{c'' - a''d}{b'' - a''}\right),$$

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{c - ad}{b - a} + \frac{c' - a'd}{b' - a'} - \frac{c'' - a''d}{b'' - a''}\right),$$

$$t = d - \frac{1}{2}\left(\frac{c - ad}{b - a} + \frac{c' - a'd}{b' - a'} + \frac{c'' - a''}{b'' - a''}\right)$$

Hướng dẫn : Định thức của hệ là

$$D = 2(b - a)(b' - a')(b'' - a'') \neq 0,$$

nên hệ có nghiệm duy nhất. Muốn giải hệ, nhân hai vế của phương trình thứ tư lần lượt với $-a$, a', $-a''$ rồi cộng vào các phương trình trên nó.

81. a) Định thức của hệ là định thức dạng Vandec — Mông. Tính $\frac{D_i}{D}$, giản ước các thừa số chung. Nếu ký hiệu

$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$ thì

$$x_i = \frac{-f(t)}{(t - a_i) f'(a_i)}, \; i = 1, \ldots, n.$$

b) $D = (a - b)^{n-1}[a + (n - 1)b]$.

$$D_k = (a - b)^{n-2}[a + (n - 1)b]\, c_k + b(a - b)^{n-2} \sum_{i=1}^{n} c_i.$$

$$\text{Vậy } x_k = \frac{c_k}{a - b} - \frac{b \sum_{i=1}^{n} c_i}{(a - b)[a + (n - 1)b]}.$$

c) Định thức của hệ là $D = 2abc \neq 0$. Vậy

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \; y = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \; z = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab}$$

82. a) Giả sử $f(x) = ax^2 + bx + c$. Giải hệ

$$\begin{cases} a + b + c = -1 \\ a - b + c = 9 \\ 4a + 2b + c = -3 \end{cases}$$

a được $a = 1$, $b = -5$, $c = 3$.

Vậy $f(x) = x^2 - 5x + 3$.

b) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7$.

83. a) $x_1 = -8$; $x_2 = 3 + x_4$; $x_3 = 6 + 2x_4$.

b) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

c) $x_1 = -16 + x_3 + x_4 + 5x_5$,

$x_2 = 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5$.

d) $x_1 = \frac{1}{3}(2 + x_5)$; $x_2 = \frac{1}{6}(1 + 3x_3 - 3x_4 + 5x_5)$.

e) Vô nghiệm.

f) $x_1 = \frac{1}{6}(1 + 5x_4)$; $x_2 = \frac{1}{6}(1 - 7x_4)$;

$$x_3 = \frac{1}{6}(1 + 5x_4).$$

84. a) Chẳng hạn dùng phương pháp Gauxơ :

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{và hàng 2}]{\text{đổi chỗ hàng 1}} \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{2 và hàng 3}]{\text{đổi chỗ hàng}} $$

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & (1-\lambda)(1+\lambda)^2 \end{bmatrix}$$

Vậy 1) nếu $\lambda \neq 1, \lambda \neq -2$ thì hệ có nghiệm duy nhất :

$$x = -\frac{\lambda + 1}{\lambda + 2}; \; y = \frac{1}{\lambda + 2}; \; z = \frac{(\lambda + 1)^2}{\lambda + 2}.$$

2) nếu $\lambda = -2$: hệ vô nghiệm.

3) nếu $\lambda = 1$: hệ vô định, phụ thuộc hai tham số : $x = 1 - y - z$; $y = y$; $z = z$.

b) Chẳng hạn dùng phương pháp định thức

$$D = \det A = (1 - \lambda)^3 (\lambda + 3).$$

Vậy 1) Nếu $D \neq 0$ hay $\lambda \neq 1, \lambda \neq -3$: hệ có nghiệm duy nhất :

$$x = -\frac{\lambda^2 + 2\lambda + 2}{\lambda + 3}; \; y = -\frac{\lambda^2 + \lambda - 1}{\lambda + 3}$$

$$; \; z = \frac{2\lambda + 1}{\lambda + 3},$$

$$t = \frac{\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1}{\lambda + 3}.$$

2) nếu $\lambda = 1$, $D = 0$ nhưng hạng A = hạng $B = 1$. Hệ vô định, phụ thuộc ba tham số : $x = 1 - y - z - t$; $y = y$; $z = z$; $t = t$

3) $\lambda = -3$: Trong A có ít nhất một định thức con cấp ba khác không, chẳng hạn

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Vậy hạng $A = 3$. Xét định thức con đặc trưng vây quanh D_1, ta thấy nó khác không. Vậy hạng của ma trận bổ sung B bằng 4. Cho nên trường hợp này hệ vô nghiệm.

c) Nếu a, b, c khác nhau cả thì hệ có nghiệm duy nhất :

$$x = abc,\ y = -(ab + ac + bc),\ z = a + b + c.$$

Nếu hai trong ba số a, b, c bằng nhau, hệ vô định phụ thuộc hai tham số.

Nếu $a = b = c$, hệ vô định phụ thuộc ba tham số.

d) Nếu a, b, c khác nhau cả thì hệ có nghiệm duy nhất :

$$x = \frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)},\ y = \frac{(a-d)(c-d)}{(a-b)(c-b)},$$

$$z = \frac{(a-d)(b-d)}{(a-c)(b-c)}.$$

Nếu $a = b = c = d$: hệ vô định, phụ thuộc 3 tham số.

Nếu $a = b \neq c$: hạng $A = 1$. Do đó nếu $d = a\ (= b)$ hoặc $d = c$ thì hệ vô định phụ thuộc hai tham số ; nếu $d \neq a$ và $d \neq c$ thì hệ vô nghiệm.

Nếu $a = c \neq b$: hạng $A = 2$. Do đó nếu $d = c$ hoặc $d = b$ thì hệ vô định phụ thuộc một tham số ; nếu $d \neq c$, $d \neq b$: hệ vô nghiệm.

Nếu $b = c \neq a$: Hệ vô định phụ thuộc một tham số nếu $d = c$ hoặc $d = a$; hệ vô nghiệm nếu $d \neq c$ và $d \neq a$.

35. a) Nếu $b(a-1) \neq 0$: hệ xác định, và

$$x = \frac{2b-1}{b(a-1)};\ y = \frac{1}{b};\ z = \frac{2ab-4b+1}{b(a-1)}.$$

Nếu $a = 1,\ b = \frac{1}{2}$: hệ vô định, phụ thuộc một tham số.

Các trường hợp khác : hệ vô nghiệm.

b) Khi $b(a-1)(a+2) \neq 0$: hệ xác định, và

$$x = z = \frac{a-b}{(a-1)(a+2)};\ y = \frac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)}.$$

Khi $a = -2$, $b = -2$: hệ vô định, 1 tham số.

Khi $a = b = 1$: hệ vô định, 2 tham số (hai trường hợp này dễ dàng tính nghiệm tổng quát).

Các trường hợp khác : hệ vô nghiệm.

c) Nếu $(a - 1)(a + 2) \neq 0$: hệ xác định,

$$x = \frac{m(a+1) - (n+p)}{(a+2)(a-1)} ; \; y = \frac{n(a+1) - (m+p)}{(a+2)(a-1)} ;$$

$$z = \frac{p(a+1) - (n+m)}{(a+2)(a-1)} .$$

Nếu $a = 1$, $m = n = p$: hệ vô định, hai tham số.

Nếu $a = -2$, $m + n + p = 0$: hệ vô định, một tham số (hai trường hợp này dễ dàng tính nghiệm tổng quát).

Các trường hợp còn lại ($a = 1$ và m, n, p không đồng thời bằng nhau ; $a = -2$ và $m + n + p \neq 0$) hệ vô nghiệm.

d) Nếu $a(a - b) \neq 0$: hệ xác định,

$$x = \frac{a^2(b-1)}{b-a} ; \; y = \frac{b(a^2-1)}{a(a-b)} ; \; z = \frac{a-1}{a(b-a)} .$$

Nếu $a = b = 1$: hệ vô định, hai tham số (dễ tính nghiệm tổng quát).

Các trường hợp khác ($a = b \neq 1$ và $a = 0$) hệ vô nghiệm.

86. a) $D = \det A = \lambda^2(\lambda - 1)$.

Nếu $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$: hệ có nghiệm duy nhất.

Nếu $\lambda = 0$ hoặc $\lambda = 1$: hệ vô nghiệm.

b) $D = \det A = -2\lambda$.

Nếu $\lambda \neq 0$ thì $x = 1 - 2\lambda$, $y = \lambda$, $z = 0$.

Nếu $\lambda = 0$ thì $x = 1$, $z = 0$, $y = y$ tùy ý.

c) Nếu $k \neq 3$, $k \neq -1$: hệ xác định,

$$x_1 = \frac{2(k-1)}{3-k}, \; x_2 = \frac{k+1}{k-3},$$

$$x_3 = \frac{2(k-1)}{k-3}, \; x_4 = \frac{(k-1)^2}{3-k}.$$

Nếu $k = -1$: hệ vô định, hai tham số,

$$x_1 = -x_4, \; x_2 = 1 - x_3, \; x_3 = x_3, \; x_4 = x_4.$$

Nếu $k = 3$: hệ vô nghiệm.

87. a) $D = (k-1)^2 (k+1)$.

Nếu $k \neq \pm 1$: hệ xác định.

Nếu $k = 1$: hệ vô định, một tham số.

Nếu $k = -1$: hệ vô nghiệm.

b) $D = a(b-1)(b+1)$.

Nếu $a \neq 0$, $b \neq \pm 1$: hệ có nghiệm duy nhấ

Nếu $a = 0$, $b = 5$: hệ vô định, 1 tham số :

$$x = x, \; y = -\frac{1}{3}, \; z = \frac{4}{3}.$$

Nếu $b = 1$: hệ vô định, 1 tham số

$$x = x, \; y = 1 - ax, \; z = 0.$$

Các trường hợp còn lại ($b = -1$ hoặc $a = 0$, $b \neq 5$) : hệ vô nghiệm.

c) Nếu $a \neq 0$, $a \neq -3$: hệ xác định,

$$x = a^3 + 2a^2 - a - 1 \; ; \; y = 2a + 1 \; ; \; z = 2 - a^2.$$

Nếu $a = 0$: hệ vô định, 2 tham số (hệ thuần nhất). Nghiệm tổng quát là $x = -y - z$, $y = y$, $z = z$. Hệ nghiệm cơ bản là $(-1, 1, 0)$, $(-1, 0, 1)$. Nếu $a = -3$: hệ trở thành hệ thuần nhất, vô định phụ thuộc 1 tham số. Nghiệm tổng quát : $x = z$, $y = z$, $z = z$. Nghiệm cơ bản $(1, 1, 1)$.

88. a) $D = |A| = -m(m+2)$.

Nếu $m \neq 0$, $m \neq -2$: hệ có nghiệm duy nhất

Nếu $m = 0$ hoặc $m = -2$: hệ vô nghiệm.

b) $D = |A| = m(m^2 - 1)$.

Nếu $m \neq 0$, $m \neq \pm 1$: hệ xác định.

Nếu $m = 0$: hệ vô nghiệm.

Nếu $m = 1$: hệ vô nghiệm.

Nếu $m = -1$: hệ vô định, 1 tham số.

c) $D = |A| = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)$.

Nếu $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \pm 1$: hệ vô nghiệm.

89. a) $D = 3(c+1)(c-1)^3$.

Nếu $c \neq \pm 1$: hệ xác định.

Nếu $c = -1$: hệ vô nghiệm.

Nếu $c = 1$: hệ vô định phụ thuộc hai tham số.

b) $D = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$.

Nếu $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 2$, $\lambda \neq 3$: hệ xác định.

Nếu $\lambda = 2$ hoặc $\lambda = 3$: hệ vô nghiệm.

Nếu $\lambda = 1$: hệ vô định, phụ thuộc một tham số.

c) $D = d(d-1)(d+2)$.

Nếu $d \neq 0$, $d \neq 1$, $d \neq 2$: hệ xác định.

Nếu $d = 1$ hoặc $d = -2$: hệ vô nghiệm.

Nếu $d = 0$: hệ vô định, 1 tham số.

d) $D = (a-1)^2(a+1)$.

Nếu $a \neq \pm 1$: hệ xác định.

$$x = 1,\ y = \frac{-3a^2 - a + 1}{a+1},$$

$$z = \frac{a(3a-1)(a^2 - a - 1)}{(a+1)(a-1)^2}.$$

Nếu $a = 1$: hệ vô định, hai tham số.

Nếu $a = -1$: hệ vô nghiệm.

90. a) Nếu $\lambda(\lambda + 3) \neq 0$: hệ xác định :

$$x_1 = \frac{2 - \lambda^2}{\lambda(\lambda + 3)}, \quad x_2 = \frac{2\lambda - 1}{\lambda(\lambda + 3)},$$

$$x_3 = \frac{\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 1}{\lambda(\lambda + 3)}.$$

Nếu $\lambda = 0$ hoặc $\lambda = -3$: hệ vô nghiệm.

b) $D = abc - a - b - c + 2$.

Nếu $D \neq 0$: hệ có nghiệm duy nhất :

$$x = \frac{(b-1)(c-1)}{D}, \quad y = \frac{(a-1)(c-1)}{D},$$

$$z = \frac{(a-1)(b-1)}{D}.$$

Trong trường hợp này hai ẩn nào đó có thể đồng thời lấy giá trị không, còn ẩn thứ ba và tham số tương ứng bằng đơn vị. Chẳng hạn $x = y = 0$, $z = 1$ với $c = 1$.

Nếu $D = 0$ với một và chỉ một trong các số a, b, c khác đơn vị thì nghiệm phụ thuộc một tham số ; chẳng hạn khi $a \neq b = c = 1$ thì nghiệm tổng quát có dạng $x = 0$, $y = 1 - z$, $z = z$. Trong trường hợp này, một hoặc hai ẩn bắt buộc phải bằng không.

Nếu $a = b = c = 1$ thì nghiệm tổng quát có dạng $x = 1 - y - z$, $y = y$, $z = z$, và một hoặc hoặc hai ẩn có thể bằng 0.

Nếu $D = 0$ và không số nào trong các số a, b, c bằng đơn vị thì hệ không tương thích. Trường hợp $D = 0$ với một và chỉ một trong các số a, b, c bằng đơn vị không xảy ra.

c) Nếu $D = abc - a - b - c + 2 \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất.

$$x = \frac{abc - 2bc + b + c - a}{D},\ y = \frac{abc - 2ac + a + c - b}{D},$$

$$z = \frac{abc - 2ab + a + b - c}{D}.$$

Nếu $D = 0$ và chỉ một trong các số a, b, c khác đơn vị, thì nghiệm phụ thuộc một tham số. Chẳng hạn khi $a \neq b = c = 1$, nghiệm tổng quát là $x = 1,\ y = -z,\ z = z$.

Nếu $a = b = c = 1$ thì nghiệm phụ thuộc hai tham số và nghiệm tổng quát có dạng $x = 1 - y - z;\ y = y,\ z = z$.

Nếu $D = 0$ và a, b, c đều khác đơn vị thì hệ không tương thích.

Nếu $D = 0$ và chỉ một trong các số a, b, c bằng đơn vị: không xảy ra.

Hướng dẫn: để chứng minh trường hợp thứ tư, ta chứng minh rằng $D - D_x = 2(b-1)(c-1)$, $D - D_y = 2(a-1)(c-1)$, $D - D_z = 2(a-1)(b-1)$.

91. a) Ba điểm M_1, M_2, M_3 cùng nằm trên đường thẳng khi và chỉ khi

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

b) Ba đường thẳng có điểm chung khi và chỉ khi hai ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \text{ và } B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

có hạng bằng nhau. Vậy :

1) Nếu hạng $A = 2$, $|B| = 0$ thì hạng $B = 2$; ba đường thẳng đồng quy tại một điểm.

2) Nếu hạng $A =$ hạng $B = 1$ thì ba đường thẳng trùng nhau.

3) Khi hạng $A = 2$ hạng $B = 3$ hoặc khi hạng $A = 1$ còn hạng $B = 2$ hay hạng $B = 3$ thì ba đường thẳng không có điểm chung.

Chú ý: nếu coi các đường thẳng song song là có điểm chung ở vô tận, thì chỉ trừ trường hợp hạng $A = 2$, hạng $B = 3$ thì ba đường thẳng không có điểm chung. Vậy điều kiện ắt có và đủ để đường thẳng có điểm chung là

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

c) n điểm $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ cùng nằm trên đường thẳng khi và chỉ khi ma trận

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & y_n & 1 \end{bmatrix}$$

có hạng bé hơn 3

d) n đường thẳng đã cho có điểm chung khi và chỉ khi hai ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & c_n \end{bmatrix} \text{ và } B = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 \\ \cdots & \cdots \\ a_n & b_n \end{bmatrix}$$

có hạng bằng nhau.

e) Bốn điểm M_0, M_1, M_2, M_3 cùng nằm trên đường tròn khi và chỉ khi

$$\begin{vmatrix} x_0^2+y_0^2 & x_0 & y_0 & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

f) Bốn điểm M_1, M_2, M_3, M_4 cùng nằm trên mặt phẳng khi và chỉ khi

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

g) Điều kiện ắt có và đủ là ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix}$$

không đổi hạng khi ta bỏ cột cuối.

Nếu coi các mặt phẳng song song là cùng đi qua điểm vô tận thì điều kiện là $\det A = 0$.

92. a) $$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

b) $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$.

Tâm tại điểm (2, 0), bán kính bằng $\sqrt{5}$.

c) Dùng câu a).

d) Bốn mặt phẳng cùng đi qua một điểm, nhưng không có ba mặt phẳng nào trong chúng đi qua một đường thẳng.

93. a)
$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

b) Hypecbôn $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{25} = 1$.

c) $2x^2 + 7y^2 + y - 8 = 0$.

Đó là một elip với tâm tại điểm $\left(0, -\dfrac{1}{14}\right)$ và các nửa trục có độ dài là $\dfrac{15\sqrt{14}}{28}$ và $\dfrac{15}{14}$, trục lớn song song với trục hoành, trục bé nằm trên trục tung.

94. a)
$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - x - 2 = 0$.

Tâm tại điểm $\left(\dfrac{1}{2}, 0, 0\right)$. Bán kính bằng $\dfrac{3}{2}$.

95. a) Hệ ba phương trình tuyến tính hai ẩn, trong đó ma trận bổ sung và ba ma trận hệ số của mỗi cặp phương trình bất kỳ đều có hạng 2.

b) Hệ ba phương trình tuyến tính hai ẩn, trong đó hạng của các ma trận hệ số của mỗi cặp phương trình đều bằng hai, còn hạng của ma trận bổ sung bằng ba.

c) Hệ ba phương trình tuyến tính ba ẩn, trong đó hạng của tất cả các ma trận hệ số của mỗi cặp phương trình cũng như hạng của ma trận hệ số của phương trình đều bằng hai, còn hạng của ma trận bổ sung bằng ba.

d) Hệ bốn phương trình tuyến tính ba ẩn, trong đó hạng của các ma trận hệ số của ba phương trình bất kỳ đều bằng ba, còn hạng của ma trận bổ sung bằng bốn.

96. Nếu không xét các đường thẳng và mặt phẳng ở vô tận thì các phương trình dạng $Ox + Oy = a$ và $Ox + Oy + Oz = a$, trong đó $a \neq 0$, không có ý nghĩa hình học ; còn khi $a = 0$ thì chúng được thỏa mãn bởi các tọa độ của các bất kỳ của mặt phẳng hoặc không gian. Loại trừ các phương trình dạng đó và ký hiệu hạng của ma trận hệ số là r, còn hạng của ma trận bổ sung là r_1 1 có :

a) Đối với các hệ phương trình hai ẩn :

1) $r = 2$, $r_1 = 3$: Hệ vô nghiệm. Các đường không đi qua một điểm, hơn nữa ít nhất có hai đường thẳng phân biệt và cắt nhau.

2) $r = r_1 = 2$: Hệ có nghiệm duy nhất. Các đường thẳng đi qua một điểm; hơn nữa ít nhất có hai đường thẳng phân biệt.

3) $r = 1$, $r_1 = 2$: Hệ vô nghiệm. Các đường thẳng song song hoặc trùng nhau, hơn nữa có ít nhất hai đường thẳng khác nhau.

4) $r = r_1 = 1$: Hệ vô định, một tham số.

Tất cả các đường thẳng đều trùng nhau.

b) Đối với các hệ phương trình ba ẩn :

1) $r = 3$, $r_1 = 4$: Hệ vô nghiệm. Các mặt phẳng không đi qua một điểm chung, hơn nữa ít nhất có ba mặt khác nhau và đi qua một điểm chung.

2) $r = r_1 = 3$: Hệ có nghiệm duy nhất. Các mặt phẳng đi qua một điểm chung, hơn nữa có ít nhất ba mặt phẳng không đi qua một đường thẳng.

3) $r = 2$, $r_1 = 3$: Hệ vô nghiệm. Các mặt phẳng không đi qua một điểm chung, hơn nữa ít nhất có ba mặt phẳng phân biệt và ba mặt phẳng khác nhau bất kỳ hoặc không có điểm chung hoặc đi qua một đường thẳng.

4) $r = r_1 = 2$: Hệ vô định, phụ thuộc một tham số. Tất cả các mặt phẳng đều đi qua một đường thẳng, hơn nữa ít nhất hai trong chúng là khác nhau.

5) $r = 1$, $r_1 = 2$: Hệ vô nghiệm. Các mặt phẳng song song hoặc trùng nhau, hơn nữa ít nhất hai trong chúng là khác nhau.

6) $r = r_1 = 1$: Hệ vô định, phụ thuộc hai tham số. Tất cả các mặt phẳng đều trùng nhau.

97. a) Giả sử $A = [\alpha_{ij}]$ cấp $r \times n$, $B = [\lambda_{ij}]$ cấp $r \times r$ thì

$$BA = \begin{bmatrix} \sum_{s=1}^{n} \lambda_{1s}\alpha_{s1} & \dots & \sum_{s=1}^{n} \lambda_{s1}\alpha_{sn} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_{s=1}^{n} \lambda_{rs}\alpha_{s1} & \dots & \sum_{s=1}^{n} \lambda_{rs}\alpha_{sn} \end{bmatrix}.$$

Ta thấy các hàng của ma trận AB là các nghiệm của hệ phương trình.

Ngoài ra, vì $|B| \neq 0$ nên hạng của B cũng bằng r và $A = B^{-1}(BA)$, tức là lời giải viết trong ma trận A chính là tổ hợp tuyến tính của các lời giải viết trong ma trận BA; vì vậy BA biểu diễn hệ cơ bản các nghiệm của hệ phương trình.

C là một hệ cơ bản các nghiệm nên

$$\alpha_{ij} = \lambda_{i1}\gamma_{1j} + \lambda_{i2}\gamma_{2j} + \dots + \lambda_{ir}\gamma_{rj},$$

$j = 1, 2, \dots, n$; tức là $A = BC$ với B là ma trận $[\lambda_{ij}]$ cấp $r \times r$. Mặt khác, A cũng gồm một hệ cơ bản các nghiệm của hệ phương trình nên $|B| \neq 0$.

98. a) Nghiệm tổng quát: $x_1 = x_1$, $x_2 = x_2$, $x_3 = x_3$,

$$x_4 = \frac{-9x_1 + 3x_2 - 10x_3}{11}, \quad x_5 = \frac{-3x_1 + x_2 + 4x_3}{11}$$

Một hệ thống cơ bản các nghiệm là

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	0	0	$\frac{9}{11}$	$\frac{3}{11}$
0	1	0	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$
0	0	1	$\frac{10}{11}$	$\frac{4}{11}$

b) Hệ chỉ có nghiệm không.

c) Nghiệm tổng quát:

$x_1 = x_4 - x_5$, $x_2 = x_4 - x_6$, $x_3 = x_4$, $x_4 = x_4$, $x_5 = x_5$, $x_6 = x_6$.

Một hệ cơ bản các nghiệm là

$$(\ 1,\ \ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0),$$
$$(-1,\ \ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0),$$
$$(\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1).$$

d) Nghiệm tổng quát:

$$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{x_3 - 2x_5}{3},\ x_3 = x_3,\ x_4 = 0,\ x_5 = x_5.$$

Một hệ cơ bản các nghiệm là

$$\left(0, \frac{1}{3}, 1, 0, 0\right)$$
$$\left(0, \frac{2}{3}, 0, 0, 1\right)$$

c) Nghiệm tổng quát là
$x_1 = -3x_3 - 5x_5$, $x_2 = 2x_3 + 3x_5$, $x_3 = x_3$, $x_4 = 0$
$x_5 = x_5$.

Hệ cơ bản các nghiệm :

$$(-3, 2, 1, 0, 0),$$
$$(-5, 3, 0, 0, 1).$$

99. a) $\mathrm{Ker}\, f = \{(8a - 7b, -6a + 5b, a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Một cơ sở của Ker f gồm các vectơ

$$(\ 8, -6, 1, 0),$$
$$(-7, \ 5, 0, 1).$$

Vậy dim Ker $f = 2$.

b) $\mathrm{Ker} f =$
$$= \left\{\left(\frac{-4k + 7l}{-8}, \frac{-4k + 5l}{8}, \frac{4k - 5l}{8}, k, l\right) \middle| k, l \in \mathbb{R}\right\}.$$

Một cơ sở của Ker$f$ gồm các vectơ

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right),$$
$$\left(\frac{7}{8}, \frac{5}{8}, \frac{5}{8}, 0, 1\right).$$

Vậy dim Ker$f = 2$.

c) $$\mathrm{Ker} f = \left\{\left(k_1, k_2, k_3, -\frac{9k_1 + 6k_2 + 8k_3}{4}, \frac{3k_1 + 2k_2 + 4k_3}{4}\right) \middle| k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Một cơ sở của Ker$f$ gồm các vectơ

$$\left(1, 0, 0, -\frac{9}{4}, \frac{3}{4}\right),$$

$$\left(0, 1, 0, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$(0, 0, 1, -2, 1)$$

và dim Ker$f = 3$.

d) Ker$f = 0$. Vậy Ker$f$ là không gian con không, có số chiều bằng không. Trong trường hợp này f là đơn ánh.

e) Định thức det$F = (1 - a)^2 (a + 2)$. Vậy f là một tự đẳng cấu của $\mathbb{R}^3$ khi và chỉ khi $a \neq 1$ và $a \neq -2$.

100. a) Giả sử N là tập tất cả các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j = 0, \; i = 1, ..., m. \qquad (1)$$

và giả sử $\gamma = (c_1, ..., c_n) \in N$, $\delta = (d_1, ..., d_n) \in N$, tức là

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j = 0, \; \sum_{j=1}^{n} a_{ij} d_j = 0.$$

Thế thì

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(c_j + d_j) = 0, \; \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(kc_j) = 0,$$

$$i = 1, ..., m,$$

tức là $\gamma + \delta \in N$, $k\gamma \in N$ với mọi $k \in \mathbb{R}$.

Vậy N là một không gian con của $\mathbb{R}^n$.

b). Giả sử ma trận hệ số A của hệ phương trình (1) có hạng bằng r, bao giờ ta cũng tìm được một định thức con cấp r khác không trong ma trận đó, giả sử là định thức con D tạo thành bởi r hàng đầu và r cột đầu của A. Khi đó, chỉ giữ lại r phương trình đầu và giữ lại ở vế trái r ẩn đầu, ta thu được một hệ Krame gồm r phương trình, r ẩn tương đương với hệ đã cho. Theo quy tắc Krame, ta tìm được

$$x_j = \sum_{i=1}^{n-r} p_{ji} x_{r+i}, \quad j = 1, \dots, r. \tag{2}$$

Lần lượt cho các ẩn tự do $x_{r+1}, \dots, x_n$ lấy các bộ giá trị $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, ...,

$$(0, 0, \dots, 0, 1),$$

ta được các vectơ nghiệm tương ứng thuộc N

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= (c_{11}, \dots, c_{1r}, 1, 0, \dots, 0),\\
\gamma_2 &= (c_{21}, \dots, c_{2r}, 0, 1, \dots, 0),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\gamma_{n-r} &= (c_{n-r,1}, \dots, c_{n-r,r}, 0, 0, \dots, 1),
\end{aligned} \tag{3}$$

trong đó các c_{ij} ($i = 1, \dots, n - r$; $j = 1, \dots, r$) được tính bởi công thức (2).

Ta chứng tỏ rằng (3) là một cơ sở của N. Hệ (2) độc lập tuyến tính vì định thức tạo bởi r cột cuối của ma trận mà các hàng là $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-r}$ khác không. Lấy một vectơ nghiệm bất kỳ $\delta = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in N$. Hạng của hệ vectơ (2) ghép thêm δ bằng hạng của ma trận

$$B = \begin{bmatrix}
c_{11} \dots & c_{1r} & 1 & 0 \dots & 0\\
c_{21} \dots & c_{2r} & 0 & 1 \dots & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
c_{n-r,1} \dots & c_{n-r,r} & 0 & 0 \dots & 1\\
d_1 \dots & d_r & d_{r+1} & d_{r+2} & d_n
\end{bmatrix}$$

Từ cách xác định các c_{ij} và các d_j theo công thức (2) ta thấy r cột đầu của ma trận B là tổ hợp tuyến tính của $n - r$ cột cuối, tức là hạng $B = n - r$ (vì r cột cuối của B độc lập tuyến tính). Xét hạng của B như hạng của hệ thống hàng, ta được ô biểu thị tuyến tính được qua hệ (3).

c) Giả sử f là một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^m$. Theo công thức $[xf] = [x]F$, trong đó F là ma trận cấp $n \times m$ của ánh xạ f tính trên một cặp cơ sở nào đó của $\mathbb{R}^n$ và $\mathbb{R}^m$, ta được

$$\mathrm{Ker} f = \{x \in \mathbb{R}^n \mid [x]F = 0\}$$

Vậy muốn tìm $\mathrm{Ker} f$, ta phải giải một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất gồm m phương trình n ẩn. Số chiều của $\mathrm{Ker} f$ là $n - r$, trong đó r là hạng của ma trận F. Một cơ sở của $\mathrm{Ker} f$ chính là hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất đã dùng để xác định $\mathrm{Ker} f$.

101. a) Là một hệ quả trực tiếp của bài trên. Vì khi đó $r = n - 1$ nên $\dim V = 1$, tức là không gian các nghiệm của hệ không gian một chiều.

b) và c) Viết thêm vào ma trận của hệ một hàng bất kỳ trong các hàng của nó rồi phân tích định thức của ma trận thu được theo hàng đầu. Áp dụng câu trên.

102. a) Trong cả hai trường hợp, điều kiện ắt có và đủ là : hệ phương trình đã cho là hệ phương trình tuyến tính đẳng cấp.

b) Điều kiện ắt có và đủ là : tổng các hệ số của tổ hợp tuyến tính đã cho bằng đơn vị.

c) Điều kiện là : hạng của ma trận hệ số giảm bớt một đơn vị khi gạch bỏ cột thứ k, nói khác đi, cột thứ k không phải là tổ hợp tuyến tính của các cột còn lại của ma trận đó.

103. a) Điều kiện là: khi bỏ cột thứ k đi thì hạng của ma trận bổ sung phải giảm đi một đơn vị.

b) Ẩn thứ nhất nhận giá trị bằng không trong mỗi nghiệm bất kỳ. Nếu các hệ số của tất cả các ẩn, trừ ẩn thứ nhất và ẩn thứ hai chẳng hạn, đều bằng không thì ẩn thứ hai nhận một giá trị xác định tìm được ở phương trình chứa hệ số khác không của ẩn thứ hai, nếu ở đó vứt bỏ đi tất cả các số hạng với các ẩn khác; trong trường hợp này, tất cả các ẩn, bắt đầu từ ẩn thứ ba, có thể nhận giá trị bất kỳ. Còn nếu ít nhất ba ẩn (chẳng hạn x_1, x_2 và x_3) có hệ số khác không thì tất cả các ẩn, trừ ẩn đầu, đều có thể nhận các giá trị bất kỳ, hơn nữa các giá trị của chúng trong mỗi nghiệm liên hệ với nhau bởi một hệ thức thu được từ phương trình bất kỳ của hệ có chứa hệ số khác không của ẩn thứ hai, nếu vứt bỏ số hạng với ẩn thứ nhất.

Với các giả thiết của bài toán, không thể xảy ra trường hợp tất cả các hệ số của ẩn thứ nhất hoặc tất cả các ẩn, kể từ ẩn thứ hai, đều bằng không.

c) Một điều kiện biểu thị rằng định thức D cấp r khác không và $(s-r)(n-r+1)$ điều kiện biểu thị rằng các định thức cấp $r+1$ vây quanh D đều bằng không.

104. a) Điều kiện là

$$e = ad - bc = 0.$$

b) Hoặc ít nhất hai trong các số a, b, c, d, e bằng -1; hoặc không số nào trong chúng bằng -1 nhưng khi đó thì

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} + \frac{d}{d+1} + \frac{e}{e+1} = 1.$$

c) Điều kiện là

$$\lambda = af + bg + ch = 0.$$

Hướng dẫn: Cộng tất cả các phương trình sau khi nhân chúng lần lượt với $\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t$.

Sau khi thu được điều kiện $\lambda = 0$, có thể tính định thức của hệ như định thức phản xứng.

CHƯƠNG III

KHÔNG GIAN VECTƠ VÀ MÔĐUN

105. b) Giả sử ta có

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i f_{k_i} = 0.$$

Thế thì

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_i f_{k_i}\right)(a_{k_i}) = \alpha_i.$$

Vậy tập $\{f_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ độc lập tuyến tính.

106. b) Với $f, g \in F$ ta có $(f + g)(a_0) = f(a_0) + g(a_0) = 0$ và với $\lambda \in P$ ta có $(\lambda f)(a_0) = \lambda f(a_0) = 0$.

Vậy F là một không gian con của V.

c) Giả sử $F \subset G \subseteq V$, trong đó G là một không gian con của không gian V. Nếu $f_0 \in G \setminus F$ thì $f_0(a_0) \neq 0$, do đó với mọi $f \in V$ ta có

$$f - \frac{f(a_0)}{f_0(a_0)} f_0 \in F,$$

từ đó

$$f \in F + \frac{f(a_0)}{f_0(a_0)} f_0 \subset G,$$

nghĩa là $G = V$.

107. a) Tập $\{f_n(t) = \sin^n t \mid n = 1, 2, \ldots\}$ độc lập tuyến tính vì chẳng hạn từ

$$\sum_{n=1}^{m} \lambda_n f_n = 0$$

ta suy ra

$$\sum_{n=1}^{m} \lambda_n \sin^n t = 0 \text{ với mọi } t.$$

Nếu đặt $\sin t = u$ thì ta có đa thức $\sum_{n=1}^{m} \lambda_n u^n$ có vô số nghiệm là các số nằm trong khoảng $[-1, 1]$, vậy đó là đa thức không, nghĩa là $\lambda_n = 0$ với mọi $n = 1, 2, \ldots, m$.

b) Giả sử $f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$,

$$g(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} (c_k \cos kt + d_k \sin kt).$$

Với $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ta có

$$(\lambda f + \mu g)(t) = \lambda f(t) + \mu g(t) =$$

$$= (\lambda a_0 + \mu c_0) + \sum_{k=1}^{n} [(\lambda a_k + \mu c_k)\cos kt + (\lambda b_k +$$

$$+ \mu d_k)\sin kt].$$

Vậy $\lambda f + \mu g \in E$, nên E là một không gian con của V.

c) Ta chứng minh rằng tập $\{1, \cos t, \sin t, ..., \cos nt, \sin nt\} = S$ là một cơ sở của E. Trước hết rõ ràng S là một tập sinh của E, ta chứng minh tập S độc lập tuyến tính bằng quy nạp. Tập $S_0 = \{1\}$ rõ ràng là độc lập tuyến tính. Giả sử ta đã chứng minh rằng tập

$$S_{m-1} = \{1, \cos t, \sin t, ..., \cos(m-1)t, \sin(m-1)t\}$$

độc lập tuyến tính. Ta xét tập $S_m = \{1, \cos t, \sin t, ..., \cos mt, \sin mt\}$. Giả sử có một tổ hợp tuyến tính của S_m bằng không:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) = 0.$$

Vì hàm f khả vi vô hạn và mọi đạo hàm của nó đều bằng không, nên $f'' + m^2 f$ cũng bằng không:

$$(f'' + m^2 f)(t) = m^2 a_0 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} (m^2 - k^2)(a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

Vế phải là một tổ hợp tuyến tính của S_{m-1} nên theo giả thiết quy nạp, tổ hợp tuyến tính đó bằng không kéo theo mọi hệ tử đều bằng không, do đó

$$a_0 = 0,\ a_k = b_k = 0,\ k = 1, 2, ..., m-1.$$

Vậy còn lại $f(t) = a_m\cos mt + b_m\sin mt = 0$ với mọi t.

Lấy $t = 0$ ta được $a_m = 0$, và lấy $t = \frac{\pi}{2m}$ ta được $b_m = 0$.—

Vậy S_m độc lập tuyến tính.

S là một cơ sở của E, do đó $\dim E = 2n + 1$.

108. b) Giả sử có một tổ hợp tuyến tính của tập $A \cup \{x\}$ bằng 0:

$$\sum_{a \in A} \alpha_a a + \alpha_x x = 0\ ;\ \alpha_a;\ \alpha_x \in P$$

Nếu $\alpha_x \neq 0$ thì x biểu thị tuyến tính được qua tập A, trái giả thiết. Vậy $\alpha_x = 0$, do đó $\sum_{a \in A} \alpha_a a = 0$ kéo theo $\alpha_a = 0$, $a \in A$ vì tập A độc lập tuyến tính.

c) Nếu tập A phụ thuộc tuyến tính thì tồn tại một $\lambda_a \in P$, $\lambda_a \neq 0$ sao cho $\sum_{a \in A} \lambda_a a = 0$.

Giả sử $\lambda_{a_0} \neq 0$. Thế thì

$$a_0 = - \sum_{a \in A \setminus \{a_0\}} \lambda_{a_0}^{-1} \lambda_a a,$$

tức là a_0 là tổ hợp tuyến tính của các phần tử thuộc tập $A \setminus \{a_0\}$. Đảo lại giả sử có $a_0 \in A$ là tổ hợp tuyến tính của các phần tử thuộc tập $A \setminus \{a_0\}$ thì

$$a_0 = \sum_{a \in A \setminus \{a_0\}} \lambda_a a,$$

do đó

$$\sum_{a \in A \setminus \{a_0\}} \lambda_a a - a_0 = 0 \Rightarrow A \text{ phụ thuộc tuyến tính.}$$

109. a) Giả sử $\mathcal{G}$ là tập tất cả các tập con độc lập tuyến tính của tập sinh X chứa S. Vì $S \in \mathcal{G}$ nên $\mathcal{G} \neq \phi$. Ta chứng minh rằng mọi tập con sắp thứ tự toàn phần của $\mathcal{G}$ có cận trên. Thật vậy, tập con $\mathcal{C} = \{T_i \mid i \in I\}$ của $\mathcal{G}$ sắp thứ tự theo quan hệ bao hàm sẽ có cận trên là $\bigcup_{i \in I} T_i$ cũng là một tập độc lập tuyến tính và chứa S. Do đó theo bổ đề Zoóc $\mathcal{G}$ có phần tử tối đại là B. Thế thì B độc lập tuyến tính. Ta chứng minh B là hệ sinh của V. Giả sử W là không gian con của V sinh bởi B. Nếu $W \neq V$ thì tồn tại một phần tử $x \in X$ sao cho $x \notin W$. Thế thì tập $B \cup \{x\}$ độc lập tuyến tính, vì nếu

$$\sum_{y \in B} \alpha_y y + \beta x = 0, \quad \alpha_y, \beta \in P$$

thì ta phải có $\beta = 0$ vì nếu không thì x biểu thị tuyến tính được qua B. Mặt khác vì B độc lập tuyến tính nên $\alpha_y = 0$ với mọi $y \in B$. Vậy tập $B \cup \{x\}$ độc lập tuyến tính, trái với tính tối đại của B.

Vậy $W = V$ và B là cơ sở của V.

b) Giả sử V có hai cơ sở A và B. Để chứng minh $|A| = |B|$ theo bài tập 39 chương I, ta chứng tỏ tồn tại một đơn ánh từ A tới B và một đơn ánh từ B tới A. Do tính chất đối xứng của A và B, ta chỉ cần chứng tỏ có một đơn ánh từ A tới B.

Ký hiệu $\mathcal{G}$ là tập các đơn ánh φ từ một tập con D của tập A tới tập B thỏa mãn điều kiện :

Tập $\mathrm{Im}\varphi \cup (A \setminus D_\varphi)$ độc lập tuyến tính (1).

$\mathcal{G} \neq \phi$ vì ánh xạ rỗng thỏa mãn điều kiện đó.

Trong $\mathcal{G}$ ta định nghĩa quan hệ $\leqslant$ như sau : với $\varphi, \psi \in \mathcal{G}$, $\varphi \leqslant \psi$ khi và chỉ khi ψ là mở rộng của φ, nghĩa là $D_\varphi \subset D_\psi$ và $\psi \mid D_\varphi = \varphi$. Rõ ràng $\mathcal{G}$ là một tập sắp thứ

tử theo quan hệ $\leqslant$ đó. Ta chứng tỏ $\mathcal{G}$ chứa phần tử tối đại bằng bổ đề Zoóc.

Giả sử $\mathcal{C}$ là một tập con sắp thứ tự toàn phần của tập $\mathcal{G}$. Ta xây dựng ánh xạ φ_0 mà

$$D_{\varphi_0} = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{C}} D_\varphi, \quad \varphi_0 \mid D_\varphi = \varphi \text{ với mọi } \varphi \in \mathcal{C}.$$

φ_0 xác định, vì nếu $a \in D_\varphi \cap D_\psi$ và chẳng hạn $\varphi \leqslant \psi$ thì $\psi(a) = \varphi(a) = \varphi_0(a)$. Vậy $\operatorname{Im}\varphi_0 = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{C}} \operatorname{Im}\varphi$, do đó ánh xạ φ_0 có $D\varphi_0 \subset A$ và $\operatorname{Im}\varphi_0 \subset B$. Ta chứng minh φ_0 là một đơn ánh. Thật vậy, nếu $a_1, a_2 \in D_{\varphi_0}$, $a_1 \neq a_2$ thì $a_1 \in D_\varphi$, $a_2 \in D_\psi$ và nếu $\varphi \leqslant \psi$ thì $\varphi(a_1) = \psi(a_1)$, do đó

$\varphi_0(a_1) = \psi(a_1) \neq \psi(a_2) = \varphi_0(a_2)$. Cuối cùng để chứng tỏ $\varphi_0 \in \mathcal{G}$ ta còn phải chứng minh rằng φ_0 thỏa mãn điều kiện (1). Chú ý rằng

$$A \setminus D_{\varphi_0} = A \setminus \Big(\bigcup_{\varphi \in \mathcal{C}} D_\varphi \Big) = \bigcap_{\varphi \in \mathcal{C}} (A \setminus D_\varphi).$$

Lấy một hệ con hữu hạn tùy ý của $\operatorname{Im}\varphi_0 \cup (A / D_{\varphi_0})$; chẳng hạn $a_1, \dots, a_m \in \operatorname{Im}_{\varphi_0}$, $b_1, \dots, b_n \in A \setminus D_{\varphi_0}$. Vì $\operatorname{Im}_{\varphi_0} = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{C}} \operatorname{Im}\varphi$ và $\mathcal{C}$ sắp thứ tự toàn phần nên tồn tại $\varphi' \in \mathcal{C}$ để $a_1, \dots, a_m \in \operatorname{Im}\varphi'$. Theo chú ý trên ta có $b_1, \dots, b_n \in A \setminus D_{\varphi'}$. Do đó $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in \operatorname{Im}\varphi' \cup (A \setminus D_{\varphi'})$ nên độc lập tuyến tính.

Vậy $\varphi_0 \in \mathcal{G}$ và rõ ràng là cận trên của tập $\mathcal{C}$.

Theo bổ đề Zoóc, $\mathcal{G}$ có phần tử tối đại là $\overline{\varphi}$. Nếu $D\overline{\varphi} = A$ thì $\overline{\varphi}$ là đơn ánh từ A tới B. Ta chứng minh rằng nếu $D\overline{\varphi} \neq A$ sẽ dẫn tới mâu thuẫn.

Vì $\operatorname{Im}\overline{\varphi} \cup (A \setminus D\overline{\varphi})$ độc lập tuyến tính và B là một cơ sở của V nên $A \setminus D\overline{\varphi})$ biểu thị tuyến tính được qua B, do đó tập $B \cup (A \setminus D\overline{\varphi})$ phụ thuộc tuyến tính. Vậy $\operatorname{Im}\overline{\varphi} \neq B$, do đó tồn tại $b_0 \in B \setminus \operatorname{Im}\overline{\varphi}$. Có hai khả năng xảy ra :

đó ta xây dựng ánh xạ φ_1 như sau : $D\varphi_1 = D\bar{\varphi} \cup \{a_0\}$ với a_0 chọn tùy ý thuộc $A \setminus D\bar{\varphi}$, $\varphi_1 | D\bar{\varphi} = \bar{\varphi}$ và $\varphi_1(a_0) = b_0$. Thế thì $\mathrm{Im}\varphi_1 = \mathrm{Im}\bar{\varphi} \cup \{b_0\}$, nên φ_1 là một đơn ánh từ một tập con của A tới B và tập $\mathrm{Im}\varphi_1 \cup (A \setminus D\varphi_1)$ độc lập tuyến tính vì là một tập con của tập độc lập tuyến tính $\mathrm{Im}\bar{\varphi} \cup \{b_0\} \cup (A \setminus D\bar{\varphi})$. Vậy $\varphi_1 \in \mathcal{G}$ và $\bar{\varphi} < \varphi_1$ mâu thuẫn với tính tối đại của $\bar{\varphi}$.

2. Tập $\mathrm{Im}\,\bar{\varphi} \cup \{b_0\} \cup (A \setminus D\bar{\varphi})$ phụ thuộc tuyến tính. Vì tập $\mathrm{Im}\,\bar{\varphi} \cup (A \setminus D\bar{\varphi})$ độc lập tuyến tính nên b_0 biểu thị tuyến tính được qua nó một cách duy nhất :

$$(2)\quad b_0 = \sum_{x \in \mathrm{Im}\bar{\varphi}} \alpha_x \cdot x + \sum_{y \in A \setminus D\bar{\varphi}} \beta_y \cdot y;\ \alpha_x,\ \beta_y \in P.$$

Vì $\mathrm{Im}\bar{\varphi} \cup \{b_0\} \subset B$ độc lập tuyến tính, do đó trong số các β_y phải có phần tử khác 0, chẳng hạn $\beta_{y_0} \neq 0$. Lúc đó ta xây dựng ánh xạ φ_2 như sau :

$$D_{\varphi_2} = D\bar{\varphi} \cup \{y_0\},\ \mathrm{Im}\varphi_2 = \mathrm{Im}\bar{\varphi} \cup \{b_0\},$$

$$\varphi_2 \mid D\bar{\varphi} = \bar{\varphi},\ \varphi_2(y_0) = b_0.$$

Rõ ràng φ_2 là một đơn ánh từ một tập con của A tới B. Mặt khác

$$\mathrm{Im}\varphi_2 \cup (A / D_{\varphi_2}) = \mathrm{Im}\bar{\varphi} \cup \{b_0\} \cup (A \setminus (D\bar{\varphi} \cup \{y_0\}))$$

là một tập độc lập tuyến tính, vì nếu nó phụ thuộc tuyến tính thì do $\mathrm{Im}\bar{\varphi} \cup (A \setminus D\bar{\varphi} \cup \{y_0\}))$ độc lập tuyến tính (là tập con của $\mathrm{Im}\bar{\varphi} \cup (A \setminus D\bar{\varphi})$) nên b_0 biểu thị tuyến tính được qua $\mathrm{Im}\bar{\varphi} \cup (A \setminus D\bar{\varphi})$ mà không có mặt y_0 trong biểu diễn đó, trái với tính duy nhất của (2). Vậy φ_2 thỏa mãn điều kiện (1), nghĩa là $\varphi_2 \in \mathcal{G}$ và $\bar{\varphi} < \varphi_2$ mâu thuẫn với tính tối đại của $\bar{\varphi}$.

110. a) Giả sử $\dim E = r$, $\dim F = s$, $G = E \cap F$ và $\dim G = t$.

Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_t$ (1)

là một cơ sở của G. Bổ sung (1) tới một cơ sở của E:

$$x_1, \dots, x_t, y_{t+1}, \dots, y_r \quad (2)$$

và bổ sung (1) tới một cơ sở của F:

$$x_1, \dots, x_t, z_{t+1}, \dots, z_s \quad (3)$$

Xét hệ vectơ:

$$x_1, \dots, x_t, y_{t+1}, \dots, y_r, z_{t+1}, \dots, z_s \quad (4)$$

Ta chứng tỏ (4) là một cơ sở của $E + F$. Lấy $u \in E + F$ thì $u = y + z$, $y \in E$, $z \in F$. Vì y biểu thị tuyến tính được qua (2) và z biểu thị tuyến tính được qua (3) nên u biểu thị tuyến tính qua (4). Vậy (4) là một hệ sinh của $E + F$. Ta chứng minh hệ (4) độc lập tuyến tính. Giả sử

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_t x_t + \beta_{t+1} y_{t+1} + \dots + \beta_r y_r + \gamma_{t+1} z_{t+1} + \dots + \gamma_s z_s = 0 \quad (5)$$

với $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k \in P$. Thế thì

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_t x_t + \beta_{t+1} y_{t+1} + \dots + \beta_r y_r = -(\gamma_{t+1} z_{t+1} + \dots + \gamma_s z_s) = v.$$

Từ đó $v \in E$ và $v \in F$, nghĩa là $v \in G$.

Vậy $v = \mu_1 x_1 + \dots + \mu_t x_t$.

Vì v chỉ biểu thị được một cách duy nhất qua cơ sở (1) nên từ hai đẳng thức cuối ta suy ra

$$\beta_{t+1} = \dots = \beta_r = 0.$$

Lúc đó hệ thức (5) trở thành

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_t x_t + \gamma_{t+1} z_{t+1} + \dots + \gamma_s z_s = 0$$

mà (3) là cơ sở của F nên

$$\alpha_i = \gamma_k = 0;\ i = 1, \dots, t;\ k = t + 1, \dots, s.$$

Vậy dim $(E + F) = r + s - t$.

b) Ta có dim $(E \cap F) \leqslant$ dim $E \leqslant$ dim $(E + F)$. Do đó nếu dim $(E + F) =$ dim $(E \cap F) + 1$ thì hoặc dim $(E \cap F) =$ dim E, lúc đó $E \cap F = E$ và $E + F = F$, hoặc dim $E =$ dim $(E + F)$, lúc đó $E = E + F$ và $E \cap F = F$.

111. a) Nếu $V = E_1 \oplus E_2$ thì $V = E_1 + E_2$ và $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ vì nếu $x \in E_1 \cap E_2$ thì $x = x + 0$, $x \in E_1, 0 \in E_2$, đồng thời $x = 0 + x$, $0 \in E_1, x \in E_2$ trái với tính duy nhất của biểu diễn $x = x_1 + x_2$, $x_i \in E_i$, $i = 1, 2$. Ngược lại, nếu $V = E_1 + E_2$ và $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ và $x = x_1 + x_2 = x_1' + x_2'$ thì $x_1 - x_1' = x_2' - x_2 \in E_1 \cap E_2$ suy ra $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2'$.

b) Giả sử là tập tất cả $\mathcal{G}$ các không gian con của không gian E chứa F và có giao bằng không với E_1. Nếu $\mathcal{C}$ là một tập con sắp thứ tự toàn phần theo quan hệ bao hàm của tập $\mathcal{G}$ thì hợp G của các không gian con thuộc $\mathcal{C}$ sẽ là cận trên của $\mathcal{C}$. Thật vậy $G \cap E_1 = \{0\}$, $F \subset G$ và G là không gian con vì nếu $x_1, x_2 \in G$ thì $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2$, $F_1, F_2 \in \mathcal{G}$, do đó chẳng hạn $F_1 \subset F_2$ thì $x_1, x_2 \in F_2$, nên $x_1 + x_2 \in F_2 \subset G$, $\lambda x_1 \in F_2 \subset G$.

Theo bổ đề Zoóc trong $\mathcal{G}$ tồn tại phần tử tối đại E_2 thỏa mãn $F \subset E_2$ và $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. Ta chứng minh $E = E_1 + E_2$. Giả sử $E_1 + E_2 \neq E$. Thế thì tồn tại $x_o \in E \setminus (E_1 + E_2)$ và $z \in E_1 \cap (E_2 + L(x_o))$, trong đó $L(x_o)$ là không gian con sinh bởi x_o. Ta có

$$z = x = y + \lambda x_o,\ x \in E_1,\ y \in E_2.$$

Nếu $\lambda \neq 0$ thì $x_o = \dfrac{x - y}{\lambda} \in E_1 + E_2$ trái giả thiết.

Vậy, $\lambda = 0$ và $z = x = y \in E_1 \cap E_2$, do đó $z = 0$, nghĩa là $E_1 \cap (E_2 + L(x_o)) = \{0\}$, trái với tính tối đại của E_2 vì $x_o \notin E_2$. Vậy $E = E_1 \oplus E_2$.

c) Theo câu (b), nếu lấy $F = \{0\}$ thì ta thấy mọi không gian con E_1 của không gian E đều có bù trực tiếp.

112. b) E_{n+1} có một cơ sở là $1, x, \ldots, x^n$, do đó dim $E_{n+1} = n + 1$. Ta chứng minh $\{f_p(x) \mid p = 0, 1, \ldots, n;$ bậc $f_p = p\}$ là một hệ độc lập tuyến tính thì sẽ là một cơ sở. Giả sử

$$\sum_{p=0}^{n} \lambda_p f_p(x) = 0.$$

So sánh hai vế, trước hết ta có $\lambda_n = 0$, từ đó lại suy ra $\lambda_{n-1} = 0, \ldots,$ cho đến $\lambda_0 = 0$. Vậy $\{f_p(x) \mid p = 0, \ldots, n\}$ là một cơ sở của E_{n+1}.

c) Rõ ràng B_f là một không gian con của E_{n+1}, có một cơ sở là hệ $f(x), f(x) \cdot x, \ldots, f(x) \cdot x^{n-k}$, do đó dim $B_f = n - k + 1$.

Với mỗi đa thức $v(x) \in E_{n+1}$, tồn tại duy nhất hai đa thức $u(x), h(x) \in E_{n+1}$ thỏa mãn $v(x) = f(x)\, u(x) + h(x)$, trong đó bậc $h(x) <$ bậc $f(x)$. Điều đó có nghĩa là $f(x)\, u(x) \in B_f$ và $h(x) \in C_f$ và mỗi phần tử thuộc E_{n+1} biểu diễn một cách duy nhất thành tổng của một phần tử thuộc B_f và một phần tử thuộc C_f. Vậy ta có $E_{n+1} = B_f \oplus C_f$.

113. Nếu x không biểu thị tuyến tính được qua tập A thì theo bài tập 108, tập $A \cup \{x\}$ độc lập tuyến tính, do đó $S \subset A \cup \{x\}$ cũng độc lập tuyến tính.

Giả sử x biểu thị tuyến tính được qua tập A, tức là

$$x = \sum_{a \in A} \lambda_a \cdot a. \quad (1)$$

Theo giả thiết x không biểu thị tuyến tính được qua tập $B \subset A$, nên tồn tại vectơ $y \in A \setminus B$ sao cho $\lambda_y \neq 0$. Tr

chứng minh x không biểu thị tuyến tính được qua tập $A\setminus\{y\}$. Thật vậy, nếu $x = \sum_{a\in A\setminus\{y\}}{}' \alpha_a . a$ thì bằng cách đặt $\alpha_y = 0$ ta thu được

$$x = \sum_{a\in A}{}' \alpha_a . a$$

khác với biểu thức (1) (khác hệ tử ứng vectơ y) trái với tính độc lập của tập A. Vậy x không biểu thị tuyến tính được qua tập độc lập tuyến tính $A\setminus\{y\}$ nên theo bài tập **108**, ta có $(A\setminus\{y\})\cup\{x\}$ độc lập tuyến tính.

114. a) Giả sử $\dim V = \alpha$, và S là một tập con độc lập tuyến tính của V. Theo bài tập **109**, S chứa trong một cơ sở B của không gian V, do đó $|S| \leqslant |B| = \alpha$.

b) Giả sử φ là một ánh xạ đẳng cấu từ không gian V tới không gian E, và A là một cơ sở của V. Ta chứng minh $\varphi(A)$ là một cơ sở của E. Với $y \in E$ tùy ý tồn tại $x \in V$ sao cho $\varphi(x) = y$. Phần tử x biểu thị tuyến tính được qua cơ sở A của không gian V:

$$x = \sum_{a\in A}{}' \alpha_a a,$$

Do đó

$$y = \varphi(x) = \sum_{a\in A}{}' \alpha_a . \varphi(a)$$

chứng tỏ $\varphi(A)$ là tập sinh của E. Giả sử $B = \varphi(A)$, ta chứng minh tập B độc lập tuyến tính. Giả sử có

$$\sum_{b\in B}{}' \mu_b . b = 0.$$

Nếu đặt

$$\lambda_a = \mu_b \quad \text{nếu } b = \varphi(a)$$

thì phần tử $x = \sum_{a \in A} \lambda_a . a \in \mathrm{Ker}\varphi$, do đó $x = 0$. Vì A độc lập tuyến tính nên $\lambda_a = 0$ với mọi $a \in A$, tức là $\mu_b = 0$ với mọi $b \in B$. Vậy tập B độc lập tuyến tính.

Bây giờ giả sử $\dim V = \dim E$, A là một cơ sở của V, B là một cơ sở của E, $|A| = |B|$ và f là một song ánh từ A tới B. Lập ánh xạ φ từ V tới E, đặt tương ứng mỗi vectơ $x \in V$, $x = \sum_{a \in A} \alpha_a . a$ với vectơ $y \in E$, $y = \sum_{a \in A} \alpha_a . \varphi(a)$ thì rõ ràng φ là một đẳng cấu từ V tới E.

115. Rõ ràng $(\beta_\mu x_\lambda)(\lambda, \mu) \in \Lambda \times I$ là một tập sinh của không gian V trên P_o. Mặt khác tập này độc lập tuyến tính trên P_o vì hệ thức $\sum'_{\lambda,\mu} \rho_{\mu\lambda}\beta_\mu x_\lambda = 0$, $\rho_{\mu\lambda} \in P_o$,

có thể viết dưới dạng $\sum'_{\lambda} \left(\sum'_{\mu} \rho_{\mu\lambda}\beta_\mu\right) x_\lambda = 0$,

do đó kéo theo $\sum'_{\mu} \rho_{\mu\lambda}\beta_\mu = 0$ với mọi λ, mà $\sum'_{\mu} \rho_{\mu\lambda}\beta_\mu = 0$ kéo theo $\rho_{\mu\lambda} = 0$ với mọi λ, μ.

116. a) Cơ sở của không gian $\mathcal{M}$ các ma trận vuông cấp n trên trường P là tập các ma trận $\{I_{ij}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n\}$, có phần-tử nằm ở dòng i cột j bằng 1 còn mọi phần tử khác bằng không. Do đó $\dim \mathcal{M} = n^2$.

b) Một cơ sở của không gian $\mathcal{M}_1$ các ma trận đối xứng là tập các ma trận D_{ij}, $i \leqslant j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ có $d_{ij} = d_{ji} = 1$ còn mọi phần tử khác bằng 0. Do đó dim $\mathcal{M}_1 = \frac{n(n+1)}{2}$.

c) Một cơ sở của không gian $\mathcal{M}_2$ các ma trận phản đối xứng là tập các ma trận F_{ij}, $i < j$, $i, j = 1, \ldots, n$ có $f_{ij} = 1$, $f_{ji} = -1$ còn mọi phần tử khác bằng 0. Do đó dim $\mathcal{M}_2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

d) Rõ ràng $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ chỉ gồm ma trận không, và mỗi ma trận $A \in \mathcal{M}$, $A = [a_{ij}]$ biểu diễn được dưới dạng $A = D + F$, $D \in \mathcal{M}_1$, $F \in \mathcal{M}_2$, trong đó $F = [f_{ij}]$ và $D = [d_{ij}]$ thỏa mãn $d_{ij} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$, $f_{ij} = \frac{a_{ij} - a_{ji}}{2}$. Vậy $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$.

117. b) Tọa độ của vectơ $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ đối với cơ sở $1, x, \ldots, x^n$ là $a_0, a_1, \ldots, a_n$, còn tọa độ đối với cơ sở $1, x-\alpha, \ldots, (x-\alpha)^n$ là $f(\alpha), f'(\alpha), \frac{f''(\alpha)}{2!}, \ldots, \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$.

c) Ma trận chuyển từ cơ sở $1, x, \ldots, x^n$ tới cơ sở $1, x-\alpha, \ldots, (x-\alpha)^n$ là

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & \alpha^2 & -\alpha^3 & \ldots & (-1)^n\alpha^n \\ 0 & 1 & -2\alpha & 3\alpha^2 & \ldots & (-1)^{n-1} n\alpha^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

118. a) Cho hệ phương trình thuần nhất m phương trình n ẩn :

$$(1)\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Nếu hạng của hệ bằng r thì hệ phương trình đó tương đương với một hệ phương trình r phương trình r ẩn mà ma trận các hệ tử có định thức khác không, còn ở vế phải chứa $n - r$ ẩn tự do. Cho các ẩn tự do các giá trị tùy ý ta tìm được giá trị của các ẩn còn lại ở vế trái, và do đó được tất cả các nghiệm của hệ (1). Từ đó ta tìm được một cơ sở của không gian nghiệm bằng cách cho các ẩn tự do lấy các giá trị (1, 0, ..., 0), rồi (0, 1, ..., 0), ..., (0, 0, ..., 1), nghĩa là không gian nghiệm của hệ (1) có số chiều là $d = n - r$.

b) Giả sử L là một không gian con d chiều của không gian P^n và $\beta_i = (b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in})$, $i = 1, \dots, d$ là một cơ sở của L. Các b_{ij} lập thành ma trận

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \dots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \dots b_{2n} \\ \dots & \dots \\ b_{d1} & b_{d2} \dots b_{dn} \end{bmatrix}$$

mà rank $B = d$. Do đó ma trận B có d cột độc lập tuyến tính tối đại, chẳng hạn là d cột đầu $\gamma_1, \dots, \gamma_d$. Thế thì các cột sau của ma trận B biểu thị tuyến tính được qua d cột đầu :

$$\gamma_{d+k} = \sum_{t=1}^{d} a_{kt}\gamma_t, \ k = 1, \dots, n - d$$

hay

$$\sum_{i=1}^{d} a_{ki}\gamma_i - \gamma_{d+k} = 0,\ k = 1, 2, ..., n - d. \quad (2)$$

Ma trận các hệ tử của hệ đó là

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1d} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2d} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-d,1} & \dots & a_{n-d,d} & 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}$$

có rank $A = n - d$ vì $n - d$ cột cuối độc lập tuyến tính. Vậy hệ phương trình tuyến tính $AX = 0$, trong đó

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$ có hạng bằng $n - d$, do đó không gian nghiệm

của nó có số chiều bằng d, và có một hệ nghiệm cơ bản là $(b_{i1}, b_{i2}, ..., b_{in})$, $i = 1, 2, ..., d$ do các đẳng thức (2). Vậy không gian nghiệm đó trùng với L.

119. a) Nếu $L + x_0 = L_1 + x_1$ thì $x_0 = z_0 + x_1$, $z_0 \in L_1$. Do đó với mọi $y \in L$ ta có $y \in L_1 + x_1 - x_0 = L_1 - z_0 = L_1$. Vậy $L \subset L_1$. Tương tự $L_1 \subset L$ và $L = L_1$. Từ đó ta suy ra $x_0 - x_1 \in L$. Điều ngược lại là hiển nhiên.

b) Với mọi $x \in D = L + x_0$ ta có $x = y + x_0$, $y \in L$. Do đó $L + x = L + y + x_0 = L + x_0$.

120. a) Cho một hệ phương trình tuyến tính, ta lập hệ phương trình thuần nhất tương ứng (thu được từ hệ trên bằng cách thay vế phải bằng 0). Hệ phương trình thuần nhất có không gian nghiệm là L mà $\dim L = d = n - r$. (xem bài 118). Nếu x_0 là một nghiệm tùy ý của hệ phương trình ban đầu thì $L + x_0$ là tập tất cả các nghiệm của hệ

phương trình đã cho ban đầu, tức là các nghiệm thành lập một đa tạp tuyến tính $n - r$ chiều.

b) Cho đa tạp tuyến tính $D = L + x_0$ mà $\dim D = \dim L = d$. Theo bài 118, tồn tại hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $AX = 0$ mà không gian nghiệm là L. Nếu vectơ x_0 đã cho là $x_0 = (c_1, c_2, ..., c_n)$ và ma trận A là $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ thì ta lập hệ phương trình $AX = B$, trong đó

$$B = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix} \text{ với } d_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j, \; i = 1, 2, ..., m.$$

Rõ ràng hệ phương trình này có một nghiệm là x_0, do đó đa tạp nghiệm của nó là $L + x_0$.

121. a) Theo bài tập trên, D_1 là tập tất cả các nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính

$$A_1X = B_1, \quad (1)$$

trong đó $\operatorname{rank} A_1 = n - k_1$, và D_2 là tập tất cả các nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính

$$A_2X = B_2, \quad (2)$$

trong đó $\operatorname{rank} A_2 = n - k_2$. Lập hệ phương trình

$$AX = B, \quad (3)$$

trong đó $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$ là ma trận thu được bằng cách ghép chồng hai ma trận A_1 và A_2, còn $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$ là ma trận thu được bằng cách ghép chồng hai ma trận B_1 và B_2. Rõ ràng $D_1 \cap D_2$ là tập tất cả các nghiệm của hệ (3) theo giả thiết khác rỗng, nghĩa là hệ (3) tương thích. Mặt khác $\operatorname{rank} A \leqslant \operatorname{rank} A_1 + \operatorname{rank} A_2 = 2n - (k_1 + k_2)$ nên dim $(D_1 \cap D_2) = n - \operatorname{rank} A \geqslant n - [2n - (k_1 + k_2)] = k_1 + k_2 - n$.

b) Giả sử $D_1 = L_1 + x_1$, $D_2 = L_2 + x_2$, trong đó L_1 và L_2 là hai không gian con của không gian V mà dim $L_1 = k_1$, dim $L_2 = k_2$. Xét không gian con $L_1' = L_1 + L(x_1 - x_2)$ trong đó $L(x_1 - x_2)$ là không gian con sinh bởi vectơ $x_1 - x_2$. Thế thì dim $L_1' \leqslant k_1 + 1$. Lập đa tạp tuyến tính $Q = (L_1' + L_2) + x_2$. Rõ ràng $D_1 \subset Q$, $D_2 \subset Q$ và dim Q = dim $(L_1' + L_2) \leqslant k_1 + k_2 + 1$.

122. a) Ta chứng minh $D = L + x_o$, trong đó $L = L \times (x_1 - x_o, ..., x_k - x_o)$ là không gian con của V sinh bởi các vectơ $x_1 - x_o, ..., x_k - x_o$.

Thật vậy, giả sử $x \in D$:

$$x = \alpha_o x_o + \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k, \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1. \text{ Thế thì}$$

$x = \alpha_1(x_1 - x_o) + ... + \alpha_k(x_k - x_o) + x_o \in L + x_o$.
Mặt khác với mọi $x \in L + x_o$ ta có

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1(x_1 - x_o) + ... + \lambda_k(x_k - x_o) + x_o = \\ &= (1 - \lambda_1 - ... - \lambda_k)\, x_o + \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_k x_k = \\ &= \alpha_o x_o + \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k, \end{aligned}$$

trong đó $\alpha_i = \lambda_i$, $i = 1, ..., k$ và $\alpha_o = 1 - \lambda_1 - ... - \lambda_k$.

Rõ ràng $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1$, do đó $x \in D$.

Giả sử $D' = L' + y$ là một đa tạp chứa các vectơ x_i, $i = 0, 1, ..., k$. Thế thì $x_j - x_o \in L'$, $j = 1, ..., k$, do đó $L = L(x_1 - x_o, ..., x_k - x_o) \subset L'$. Vậy dim $L \leqslant$ dim L', tức là dim $D \leqslant$ dim D'.

b) Giả sử $D = L + x_0$ là một đa tạp mà $\dim D = \dim L = k$. Giả sử $y_1, y_2, ..., y_k$ là một cơ sở của L. Đặt $x_i = y_i + x_0$, $i = 1, 2, ..., k$. Thế thì $y_i = x_i - x_0$ và

$$L = L(x_1 - x_0, x_2 - x_0, ..., x_k - x_0).$$

Vectơ $x \in D$ khi và chỉ khi

$$x = \lambda_1(x_1 - x_0) + ... + \lambda_k(x_k - x_0) + x_0$$

hay $\quad x = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k$

với $\quad \alpha_0 = 1 - \lambda_1 - ... - \lambda_k, \quad \alpha_i = \lambda_i, i = 1, ..., k,$

do đó $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1$. Rõ ràng hệ vectơ $x_0, x_1, ..., x_k$ thỏa mãn điều kiện Bài toán.

123. a) Suy từ bài tập trên. Có thể chứng minh trực tiếp như sau. Giả sử $D = L + x_0$. Với $x_1, x_2 \in D$, ta có

$$x_1 = y_1 + x_0, \; x_2 = y_2 + x_0, \; y_1, y_2 \in L.$$

Thế thì với mọi số thực α_1, α_2 mà $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ta có

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + (\alpha_1 + \alpha_2) x_0 \in L + x_0$$

Vậy D là một tập lồi.

b) Nếu với mọi số thực $\rho, \sigma \geqslant 0$ ta có $(\rho + \sigma) M = \rho M + \sigma M$ thì lấy $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ và $\sigma = 1 - \rho$ ta có $M = \rho M + (1 - \rho) M$, do đó với mọi $x_1, x_2 \in M$ ta có $\rho x_1 + (1 - \rho) x_2 \in M$, nghĩa là M là một tập lồi. Đảo lại, nếu M là một tập lồi thì với ρ và $\sigma > 0$ ta có

$$(\rho + \sigma) M = (\rho + \sigma) \left(\frac{\rho}{\rho + \sigma} M + \frac{\sigma}{\rho + \sigma} M \right) = \rho M + \sigma M,$$

còn khi $\rho = \sigma = 0$ thì hiển nhiên vế trái bằng vế phải.

c) Giả sử $M = \bigcap_{\lambda \in I} M_\lambda$, M_λ là một tập lồi với mọi $\lambda \in I$. Giả sử $x_1, x_2 \in M$. Thế thì $x_1, x_2 \in M_\lambda$ với mọi $\lambda \in I$, do đó $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in M_\lambda$ với mọi $\lambda \in I$, tức là $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in M$, $0 \leqslant \alpha_1, \alpha_2 \leqslant 1$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Vậy M là một tập lồi.

d) Giả sử M và N là hai tập lồi. Thế thì với mọi $\rho \geqslant 0$, $\sigma \geqslant 0$, ta có

$$(\rho + \sigma)(M + N) = (\rho + \sigma) M + (\rho + \sigma) N =$$
$$= \rho M + \rho N + \sigma M + \sigma N = \rho(M + N) + \sigma(M + N).$$

Vậy $M + N$ là một tập lồi.

124. Trước hết ta chứng tỏ tập E tất cả các vectơ dạng $x = \sum'_{\alpha \in \Lambda} \rho_\alpha x_\alpha$, $\rho_\alpha \geqslant 0$ và $\sum'_{\alpha \in \Lambda} \rho_\alpha = 1$ là một tập lồi.

Giả sử $x' = \sum'_{\alpha \in \Lambda} \rho'_\alpha x_\alpha$, $x'' = \sum'_{\alpha \in \Lambda} \rho''_\alpha x_\alpha$ là hai phần tử thuộc E, và $0 \leqslant \rho \leqslant 1$. Xét $(1 - \rho)x' + \rho x''$. Ta có

$$(1 - \rho)x' + \rho x'' = \sum'_{\alpha \in \Lambda} [(1-\rho)\rho'_\alpha + \rho\rho''_\alpha] x_\alpha = \sum'_{\alpha \in \Lambda} \rho_\alpha x_\alpha.$$

trong đó $\qquad \rho_\alpha = (1 - \rho)\rho'_\alpha + \rho\rho''_\alpha$.

Rõ ràng $\rho_\alpha \geqslant 0$ với mọi $\alpha \in \Lambda$. Mặt khác ta có

$$\sum'_{\alpha \in \Lambda} \rho_\alpha = (1 - \rho) \sum'_{\alpha \in \Lambda} \rho'_\alpha + \rho \sum'_{\alpha \in \Lambda} \rho''_\alpha = 1.$$

Vậy $(1 - \rho)x' + \rho x'' \in E$ và E là một tập lồi.

Bây giờ ta chứng tỏ E được chứa trong mọi tập lồi F của Y chứa họ $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$. Ta chứng minh rằng mọi phần tử $x \in E$ đều thuộc F bằng cách quy nạp theo $N(x)$ là số các $\rho_\alpha \neq 0$ trong biểu diễn

$$x = \sum_{\alpha \in \Lambda}' \rho_\alpha x_\alpha; \ \rho_\alpha \geqslant 0, \ \sum_{\alpha \in \Lambda}' \rho_\alpha = 1.$$

Nếu $N(x) = 1$ thì $x = x_\alpha$ nào đó, $\alpha \in \Lambda$, do đó $x \in F$. Giả sử đã chứng minh rằng mọi vectơ $x \in E$ mà $N(x) \leqslant n - 1$ đều có $x \in F$. Ta xét một vectơ tùy ý $x' \in E$ mà $N(x') = n$, chẳng hạn

$$x' = \sum_{k=1}^{n} \rho_{\alpha_k} x_{\alpha_k},$$

trong đó $\rho_{\alpha_k} > 0$, $k = 1, \ldots, n$ và $\sum_{k=1}^{n} \rho_{\alpha_k} = 1$, $\alpha_k \in \Lambda$.

Đặt
$$\bar{x} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\rho_{\alpha_k}}{1 - \rho_{\alpha_n}} x_{\alpha_k}.$$

Rõ ràng $\bar{x} \in E$ và $N(\bar{x}) \leqslant n - 1$, do đó $\bar{x} \in F$ theo giả thiết quy nạp. Nhưng $x' = (1 - \rho_{\alpha_n})\bar{x} + \rho_{\alpha_n} x_{\alpha_n}$, $\bar{x}, x_{\alpha_n} \in F$ và F là một tập lồi nên $x' \in F$.

125. a) Rõ ràng một tập lồi tuyệt đối M cũng là một tập lồi. Hơn nữa nếu lấy $\mu = 0$ thì ta có ngay $\lambda M = M$ với mọi λ mà $|\lambda| = 1$.

Đảo lại, giả sử M là một tập lồi thỏa mãn $\lambda M = M$ với mọi λ mà $|\lambda| = 1$. Giả sử λ và μ là hai số phức mà $|\lambda| + |\mu| = 1$. Nếu $\lambda \neq 0$ và $\mu \neq 0$ thì

$$\lambda M + \mu M = |\lambda| \frac{\lambda}{|\lambda|} M + |\mu| \frac{\mu}{|\mu|} M = |\lambda| M + |\mu| M = M,$$ còn nếu chẳng hạn $\mu = 0$ thì $|\lambda| = 1$, do đó

$$\lambda M + \mu M = \lambda M = M.$$

b) Rõ ràng mỗi không gian con L của V là một tập lồi tuyệt đối. Giả sử $D = L + x_0$ là một đa tập tuyến tính của không gian V trên trường số phức, và D là một tập lồi tuyệt đối của V. Vì $x_0 \in D$ nên theo câu a), $-x_0 \in D$. Từ đó

$$0 = \frac{1}{2} x_0 + \frac{1}{2}(-x_0) \in D.$$

Mà $0 = (-x_0) + x_0$, nên $-x_0 \in L$. Vậy $x_0 \in L$ và ta có $D = L + x_0 = L$. Vậy D là một không gian con của V.

c) và d) suy từ các tính chất tương ứng của tập lồi và câu a).

126. a) Nếu $y = 0$ thì $|\langle x, y\rangle| = \| x \| \cdot \| y \| = 0$. Giả sử $y \neq 0$. Với mọi số phức λ ta có

$$\langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle \geqslant 0. \quad (1)$$

Từ đó ta có

$$\langle x, x\rangle - \bar{\lambda}\langle x, y\rangle - \lambda \overline{\langle x, y\rangle} + \lambda\bar{\lambda}\langle y, y\rangle \geqslant 0.$$

Trong bất đẳng thức cuối thay λ bởi số $\frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}$ và nhân bất đẳng thức với số dương $\langle y, y\rangle$ ta được

$$\langle x, x\rangle \langle y, y\rangle - \overline{\langle x, y\rangle}\langle x, y\rangle - \langle x, y\rangle \overline{\langle x, y\rangle} +$$
$$+ \langle x, y\rangle \overline{\langle x, y\rangle} \geqslant 0$$

hay $\langle x, y\rangle \overline{\langle x, y\rangle} \leqslant \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle$.

Từ đó suy ra $|\langle x, y\rangle| \leqslant \| x \| \cdot \| y \|$.

Nếu x và y độc lập tuyến tính thì $x - \lambda y \neq 0$, do đó (1) trở thành $\langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle > 0$. Vì vậy bất đẳng thức cuối cùng sẽ là $| \langle x, y \rangle | < \| x \| \cdot \| y \|$.

Còn nếu x và y phụ thuộc tuyến tính, chẳng hạn $x = \alpha y$ thì $| \langle x, y \rangle | = | \langle \alpha y, y \rangle | = | \alpha | \langle y, y \rangle = \| x \| \times \times \| y \|$.

b) $\| x + y \|^2 = \langle x + y, x + y \rangle =$

$$= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \langle y, y \rangle.$$

Vì $\langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle}$ bằng hai lần phần thực của $\langle x, y \rangle$, mà phần thực của $\langle x, y \rangle \leqslant | \langle x, y \rangle | \leqslant \| x \| \cdot \| y \|$ theo câu a) nên

$$\| x + y \|^2 \leqslant \| x \|^2 + 2 \| x \| \cdot \| y \| + \| y \|^2 = (\| x \| + \| y \|)^2,$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức tam giác.

127. a) Xét vectơ $y = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_m e_m$. Ta có

$$\langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \geqslant 0.$$

$$\langle y, y \rangle = \left\langle \sum \alpha_i e_i, \sum \alpha_i e_i \right\rangle = \sum \alpha_i \overline{\alpha_i}.$$

$$\langle x, y \rangle = \left\langle x, \sum \alpha_i e_i \right\rangle = \sum \alpha_i \overline{\alpha_i}.$$

$$\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle} = \sum \alpha_i \overline{\alpha_i}.$$

Thay vào bất đẳng thức đầu ta được

$$\langle x, x \rangle \geqslant \sum \alpha_i \overline{\alpha_i} = \sum | \alpha_i |^2.$$

b) Nếu $e_1, \ldots, e_m$ là một cơ sở trực chuẩn của E và $x \in E$ mà $\langle x, e_i \rangle = \alpha_i$ thì $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i$, do đó $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overline{\alpha_i}$.

Đảo lại, giả sử $e_1, \ldots, e_m$ là một hệ trực chuẩn của E sao cho với mọi $x \in E$ mà $\langle x, e_i \rangle = \alpha_i$, $i = 1, \ldots, m$ ta có $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overline{\alpha_i}$. Ta chứng minh $e_1, \ldots, e_m$ là một cơ sở của không gian E. Thật vậy, ta có

$$\left\langle x - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i, x - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i \right\rangle = 0,$$

do đó

$$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i$$

nghĩa là $\{e_1, \ldots, e_m\}$ là một hệ sinh của E, mà vì hệ đó trực chuẩn nên độc lập tuyến tính (xem bài dưới), do đó là một cơ sở của E.

128. a) Giả sử $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ là một hệ trực giao, và

$$\sum_{\alpha \in I} a_\alpha x_\alpha = 0.$$

Thế thì với mọi $\beta \in I$ ta có

$$\left\langle x_\beta, \sum_{\alpha \in I} a_\alpha x_\alpha \right\rangle = a_\beta \langle x_\beta, x_\beta \rangle = 0$$

mà $x_\alpha \neq 0$ nên $\langle x_\alpha, x_\alpha \rangle \neq 0$. Vậy $a_\beta = 0$ với mọi $\beta \in I$, tức là hệ $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ độc lập tuyến tính.

c) $L^* = \{x \in E \mid \langle x, y \rangle = 0$ với mọi $y \in L\}$.

Từ $\langle x_1, y \rangle = \langle x_2, y \rangle = 0$, suy ra $\langle x_1 + x_2, y \rangle = 0$ và $\langle \lambda x_1, y \rangle = 0$. Vậy L^* là một không gian con của E.

d) Giả sử $\dim E = n$ và $\dim F = k$. Trong F chọn một cơ sở trực chuẩn $e_1, \ldots, e_k$ và bổ sung tới một cơ sở trực chuẩn của E là $e_1, \ldots, e_{k+1}, \ldots, e_n$. Thế thì ta có $F^* = L(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ và rõ ràng $E = F \oplus F^*$, $(F^*)^* = F$.

129. a) Vì $(\alpha_n + \beta_n)^2 \leqslant 2(\alpha_n^2 + \beta_n^2)$, do đó các chuỗi $\sum_1^\infty \alpha_n^2$ và $\sum_1^\infty \beta_n^2$ hội tụ kéo theo chuỗi $\sum_1^\infty (\alpha_n + \beta_n)^2$ hội tụ. Vậy $x, y \in E$ kéo theo $x + y \in E$. Tương tự $\lambda x \in E$, và E là một không gian vectơ trên trường số thực.

Mặt khác $|\alpha_n \beta_n| \leqslant \frac{1}{2}(\alpha_n^2 + \beta_n^2)$, do đó chuỗi $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n\beta_n$ cũng hội tụ. Dễ thấy rằng các điều kiện của tích vô hướng cũng thỏa mãn. Vậy E là một không gian Ơclit. Trong E có một hệ trực giao vô hạn là

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots),$$
$$e_2 = (0, 1, 0, \ldots),$$
$$e_3 = (0, 0, 1, \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Do đó E là một không gian vô hạn chiều.

b) Giả sử $e_1, \ldots, e_n$ là một cơ sở trực chuẩn của F. Với $x \in F$ tùy ý, giả sử $\langle x, e_i \rangle = x_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Xét $y \in F$ mà $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, và đặt $z = x - y$. Thế thì $\langle z, e_i\rangle = \langle x - y, e_i\rangle = 0$, $i = 1, \dots, n$. Ta chứng minh $z \in F^*$. Với mọi $f \in F$, $f = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i$ ta có

$$\langle z, f\rangle = \left\langle z, \sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \langle z, e_i\rangle = 0.$$

Vậy $x \in E$ đã phân tích được thành

$$x = y + z,\ y \in F,\ z \in F^*.$$

Ta chứng minh sự phân tích đó là duy nhất. Giả sử có

$$x = y' + z',\ y' \in F,\ z' \in F^*.$$

Thế thì với mọi $i = 1, \dots, n$ ta có

$$\alpha_i = \langle x, e_i\rangle = \langle y' + z', e_i\rangle = \langle y', e_i\rangle,$$

do đó vì $e_1, \dots, e_n$ là cơ sở trực chuẩn của F nên

$$y' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = y \text{ và } z' = z.$$

Vậy $E = F \oplus F^*$.

c) Giả sử gồm tất cả các vectơ $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots)$ mà chỉ có một số hữu hạn $\alpha_i \neq 0$. Rõ ràng $F \neq E$ và F có cơ sở là $e_1, e_2, e_3, \dots$ trong câu a). Ta chứng minh $F^* = \{0\}$. Thật vậy, giả sử $y \in F^*$, $y = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots)$.

Thế thì $\langle y, c_i \rangle = 0$ với mọi $i = 1, 2, 3, \ldots$, nhưng $\langle y, c_i \rangle = \beta_i$, vậy $y = 0$. Do đó $(F^*)^* = \{0\}^* = E \neq F$ vì $E \neq F \oplus F^* = F$.

130. b) Vì E_{n+1} là một không gian $n+1$ chiều nên ta chỉ cần chứng tỏ các đa thức $P_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n$ lập thành một hệ trực giao.

Đặt $u_k(x) = (x^2 - 1)^k$. Thế thì $u_k^{(i)}(\pm 1) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, k - 1$. Do đó nếu lấy tích phân từng phần liên tiếp ta có

$$\int_{-1}^{1} u_k^{(k)}(x)\, x^i dx = [u_k^{(k-1)}(x) x^i]_{-1}^{1} -$$

$$- i \int_{-1}^{1} u_k^{(k-1)}(x)\, x^{i-1} dx = - i \int_{-1}^{1} u_k^{(k-1)}(x)\, x^{i-1} dx =$$

$$= \ldots = (-1)^i i! \int_{-1}^{1} u_k^{(k-i)}(x)\, dx = 0,\ i = 0, 1, \ldots, k - 1.$$

Bây giờ ta xét $\int_{-1}^{1} P_i(x) P_k(x)\, dx$, với $i \neq k$;

Giả sử $i < k$, $P_i(x) = \dfrac{1}{2^i . i!} u_i^{(i)}(x)$; trong đó

$$u_i^{(i)}(x) = \sum_{t=0}^{i} a_t x^t.$$

Ta có $\int_{-1}^{1} P_i(x) P_k(x) dx = \frac{1}{2^{i+k}.i!k!} \times$

$$\times \int_{-1}^{1} \left(\sum_{t=0}^{i} c_t x^t\right) u_k^{(k)}(x) dx = 0$$

theo điều vừa chứng minh.

Vậy $P_0(x), \ldots, P_n(x)$ là một cơ sở trực giao của E_{n+1}.

c) Tích phân từng phần liên tiếp như trong câu b) ta được

$$\int_{-1}^{1} u_k^{(k)}(x) u_k^{(k)}(x) dx = [u_k^{(k-1)}(x) \cdot u_k^{(k)}(x)]_{-1}^{1} -$$

$$- \int_{-1}^{1} u_k^{(k-1)}(x) u_k^{(k+1)} x dx =$$

$$= - \int_{-1}^{1} u_k^{(k-1)}(x) u_k^{(k+1)}(x) dx = .$$

$$= (-1)^k (2k)! \int_{-1}^{1} u_k(x) dx = (-1)^k (2k)! \times$$

$$\times \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^k dx = (2k)! \int_{-1}^{1} (1-x)^k (1+x)^k dx.$$

Lại tích phân từng phần tích phân cuối, ta được

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^k (1+x)^k dx = \frac{1}{k+1} [(1-x)^k \times$$

$$\times (1+x)^{k+1}]_{-1}^{1} + \frac{k}{k+1} \int_{-1}^{1} (1-x)^{k-1} (1+x)^{k+1} dx$$

$$= \frac{k}{k+1} \int_{-1}^{1} (1-x)^{k-1} (1+x)^{k+1} dx = \ldots =$$

$$= \frac{k!}{(k+1)(k+2)\ldots 2k} \int_{-1}^{1} (1+x)^{2k} dx =$$

$$= \frac{k!}{(k+1)\ldots(2k)} \cdot \frac{1}{2k+1} (1+x)^{2k+1} \Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{(k!)^2 \cdot 2^{2k+1}}{(2k)!(2k+1)}.$$

Vậy

$$\int_{-1}^{1} u_k^{(k)}(x)\, u_k^{(k)}(x)\, dx = \frac{(k!)^2 \cdot 2^{2k+1}}{2k+1}, \text{ do đó}$$

$$\|P_k\|^2 = \frac{1}{2^{2k}(k!)^2} \frac{(k!)^2 \cdot 2^{2k+1}}{2k+1} = \frac{2}{2k+1} \text{ và}$$

$$\|P_k\| = \sqrt{\frac{2}{2k+1}}.$$

d) Ta có $f_k(x) = \sum_{i=0}^{k} a_{ki} x^i$, $P_k(x) = \sum_{i=0}^{k} b_{ki} x^i$ với mọi $k = 0, 1, \ldots, n$.

Trước hết $P_o(x) = f_o(x) = 1$.

Mặt khác $\langle P_o(x), P_1(x)\rangle = \langle f_o(x), f_1(x)\rangle = 0$ nên ta có $\langle P_1(x), f_o(x)\rangle = \langle f_1(x), P_o(x)\rangle = 0$. Từ đó $P_1(x) = \alpha f_1(x)$. Giả sử đã có $P_i(x) = \alpha_i f_i(x)$, $\langle P_i(x), f_j(x)\rangle = 0$ với mọi $i \neq j$, $0 \leqslant i, j \leqslant k-1$. Ta chứng minh $P_k(x) = \alpha_k f_k(x)$ và $\langle P_k(x), f_i(x)\rangle = \langle f_k(x), P_i(x)\rangle = 0$ với mọi $i \leqslant k-1$. Thật vậy, $0 = \langle P_k(x), P_i(x)\rangle = \langle P_k(x), \alpha_i f_i(x)\rangle =$
$= \alpha_i \langle P_k(x), f_i(x)\rangle$.

Vì $\alpha_i \neq 0$ nên $\langle P_k(x), f_i(x)\rangle = 0$. Tương tự $\langle P_k(x), P_i(x)\rangle = 0$. Mặt khác $f_o(x), \ldots, f_k(x)$ là một cơ sở của $L(1, x, \ldots, x^k)$ và $P_k(x) \in L(1, x, \ldots, x^k)$ nên ta có

$$P_k(x) = \gamma_o f_o(x) + \ldots + \gamma_{k-1} f_{k-1}(x) + \alpha_k f_k(x)$$

Từ đó

$$\gamma_i = \frac{\langle P_k(x), f_i(x)\rangle}{\langle f_i(x), f_i(x)\rangle} = 0, \; i = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Do đó $P_k(x) = \alpha_k f_k(x)$, là điều phải chứng minh.

131. a) Với $x \in E$, x_o, $y \in F$ ta có

$$\| x - (x_o + \lambda y) \|^2 = \| (x - x_o) - \lambda y \|^2 =$$
$$= \| x - x_o \| - 2\lambda \langle x - x_o, y\rangle + \lambda^2 \| y \|^2.$$

Nếu $\| x - x_o \| = \min \| x - y \|$, $y \in F$ thì biểu thức trên đạt cực tiểu tại $\lambda = 0$, nhưng tam thức bậc hai $f(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$, $a > 0$ đạt cực tiểu tại $\lambda = 0$ khi và chỉ khi $b = 0$.

Vậy tam thức ở vế phải có $\langle x - x_o, y\rangle = 0$, $y \in F$, tức là $x - x_o \in F^\perp$.

Đảo lại, giả sử $x - x_0 \in F^*$, $x_0 \in F$. Với mọi $y \in F$ vì $x_0 - y \in F$ nên ta có

$$\|x - y\|^2 = \|(x - x_0) + (x_0 - y)\|^2 =$$
$$= \|x - x_0\|^2 + \|x_0 - y\|^2,$$

nghĩa là $\|x - y\|^2 \geqslant \|x - x_0\|^2$. Vậy $\|x - x_0\|$ tối tiểu.

b) Theo câu a) nếu với $x_0, x_1 \in F$ ta có $\|x - x_0\|$ và $\|x - x_1\|$ tối tiểu thì $\|x - x_0\| = \|x - x_1\|$, điều này xảy ra khi và chỉ khi $\|x_0 - x_1\| = 0$ hay $x_0 = x_1$.

c) Chọn trong F một cơ sở trực chuẩn $e_1, e_2, \dots, e_n$ và đặt $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Muốn cho $\|x - x_0\|$ tối tiểu thì theo câu a) phải có $x - x_0 \in F^*$ mà muốn vậy ắt có và đủ là $x - x_0$ trực giao với $e_1, e_2, \dots, e_n$. Như vậy ta thu được các phương trình

$$\langle x - x_0, e_j\rangle = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

hay

$$\langle x, e_j\rangle = \langle x_0, e_j\rangle = \alpha_j, \ j = 1, 2, \dots, n.$$

Như vậy vectơ x_0 phải tìm là

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle\, e_j.$$

132. Theo điều kiện b) phần tử y_1 phải có dạng $y_1 = \alpha_{11} x_1$, và theo điều kiện a):

$$\langle y_1, y_1\rangle = \alpha_{11}^2 \langle x_1, x_1\rangle = 1.$$

Từ đó ta có

$$\alpha_{11} = \frac{1}{\beta_{11}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\langle x_1, x_1\rangle}}.$$

Giả sử các phần tử y_k, $k < n$ thỏa mãn các điều kiện a, b, c đã xây dựng được. Ta tìm y_n.

Trước hết phần tử x_n có thể biểu diễn dưới dạng

$$x_n = \beta_{n1}y_1 + \dots + \beta_{n,n-1}y_{n-1} + z_n,$$

trong đó

$$\langle z_n, y_k\rangle = 0 \text{ với mọi } k < n.$$

Thật vậy, các hệ số β_{nk} và do đó phần tử z_n được xác định bởi các điều kiện.

$$\langle z_n, y_k\rangle = \langle x_n - \beta_{n1}y_1 - \dots - \beta_{n,n-1}y_{n-1}, y_k\rangle =$$
$$= \langle x_n, y_k\rangle - \beta_{nk}\langle y_k, y_k\rangle = 0.$$

Vì hệ vecto $x_1, x_2, \dots$ độc lập tuyến tính nên $\langle z_n, z_n\rangle > 0$.

Đặt $y_n = \dfrac{z_n}{\sqrt{\langle z_n, z_n\rangle}}$.

Theo cách xây dựng quy nạp phần tử z_n và do đó phần tử y_n biểu thị tuyến tính được qua $x_1, \dots, x_n$, tức là

$$y_n = \alpha_{n1}x_1 + \dots + \alpha_{nn}x_n,$$

trong đó

$$\alpha_{nn} = \frac{1}{\sqrt{\langle z_n, z_n\rangle}} \neq 0.$$

Ngoài ra $\langle y_n, y_n\rangle = 1$, $\langle y_n, y_k\rangle = 0$ với mọi $k < n$ và $x_n = \beta_{n1}y_1 + \dots + \beta_{nn}y_n$, $\beta_{nn} = \sqrt{\langle z_n, z_n\rangle} \neq 0$.

133. a) Xét các vecto

$$f_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}e_k, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Từ điều kiện $\langle e_i, f_j\rangle = \delta_{ij}$ ta có

$$\langle e_i, f_j\rangle = \langle e_i, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} e_k\rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha}_{jk} \langle e_i, e_k\rangle = \delta_{ij}.$$

Vậy ta được hệ phương trình xác định xác $\overline{\alpha_{jk}}$ sau đây, nếu đặt $\langle e_i, e_k\rangle = a_{ik}$:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{j1} x_1 + a_{j2} x_2 + \dots + a_{jn} x_n = 1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n = 0 \end{cases}$$

Vì định thức của ma trận các hệ số > 0 (là định thức Gram của hệ vectơ độc lập $e_1, e_2, \dots, e_n$ (xem bài tập 135 ở dưới) nên hệ có một nghiệm duy nhất $x_1 = \overline{\alpha}_{j1}, \dots, x_n = \overline{\alpha}_{jn}$.

Ta chứng minh hệ vectơ $f_1, \dots, f_n$ tìm được như vậy là độc lập tuyến tính. Giả sử có

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j f_j = 0.$$

Thế thì

$$0 = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \beta_j f_j, e_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \langle f_j, e_i\rangle = \beta_i, \ i = 1, \dots, n.$$

Vậy $\beta_i = 0$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$.

b) Giả sử $S = [s_{ij}]$, $T = [t_{kl}]$. Thế thì

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} e_i, \ f'_l = \sum_{k=1}^{n} t_{kl} f_k, \ j, l = 1, 2, \dots, n.$$

Theo định nghĩa của cơ sở tương hỗ ta có

$$\delta_{jl} = \langle e_j, f_l \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} s_{ij} e_i, \sum_{k=1}^{n} t_{kl} f_k \right\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} s_{ij} \overline{t}_{kl} \langle e_i, f_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} s_{ij} \overline{t}_{kl} \delta_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} s_{ij} \overline{t}_{il}.$$

Từ đó ta có $S\overline{T}' = I$ hay $T = (\overline{S'})^{-1}$

134. a) Giả sử φ là góc giữa hai vectơ x và y. Ta ký hiệu $\cos\varphi = \cos(x, y)$. Nếu $\varphi = 0$ thì $\cos(x, y) = 1$, do đó $\langle x, y \rangle = \| x \| . \| y \|$. Lúc đó với số thực α tùy ý, ta có

$$\langle x - \alpha y, x - \alpha y \rangle = \| x \|^2 - 2\alpha \langle x, y \rangle + \alpha^2 \| y \|^2 =$$
$$= \| x \|^2 - 2\alpha \| x \| . \| y \| + \alpha^2 \| y \|^2 =$$
$$= (\| x \| - \alpha \| y \|)^2.$$

Vì vậy nếu lấy $\alpha = \dfrac{\| x \|}{\| y \|}$ thì $\alpha > 0$ và $x = \alpha y$.

Đảo lại, giả sử $x = \alpha y$, $\alpha > 0$. Thế thì ta có ngay $\langle x, y \rangle = \alpha \| y \|^2 = \| x \| . \| y \|$, do đó $\cos(x, y) = 1$ và góc giữa x và y bằng 0.

b) Chứng minh tương tự câu a).

c) Nếu $\dim F < \infty$ thì theo bài tập 134 trong F tồn tại duy nhất một vectơ x_0 sao cho $\| x - x_0 \|$ tối tiểu và lúc đó $x - x_0$ trực giao với F. Thế thì

$$\cos(x, x_0) = \frac{\langle x, x_0 \rangle}{\| x \| \cdot \| x_0 \|} = \frac{\langle (x - x_0) + x_0, x_0 \rangle}{\| x \| \cdot \| x_0 \|} =$$

$$= \frac{\langle x, x_0 \rangle}{\| x \| \cdot \| x_0 \|} = \frac{\| x_0 \|}{\| x \|}.$$

Với mọi vectơ $x' \in F$ ta có

$$\cos(x, x') = \frac{\langle x, x' \rangle}{\| x \| \cdot \| x' \|} = \frac{\langle x_0, x' \rangle}{\| x \| \cdot \| x' \|} =$$

$$= \frac{\| x_0 \| \cdot \| x' \|}{\| x \| \cdot \| x' \|} \cos(x_0, x') \leq \frac{\| x_0 \|}{\| x \|} = \cos(x, x_0).$$

Vậy vectơ $y = x_0$ thỏa mãn bài toán.

135. a) Các vectơ $x_1, \ldots, x_k$ nằm trong một không gian con F mà $\dim F = k$. Giả sử trong F đã chọn một cơ sở trực chuẩn là $e_1, e_2, \ldots, e_k$. Thế thì

$$x_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} e_j,\ i = 1, 2, \ldots, k, \text{ và } \langle x_i, x_l \rangle = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} \cdot \overline{\alpha}_{lj}.$$

Vậy

$$G(x_1, \ldots, x_k) = \begin{vmatrix} \sum \alpha_{1j} \overline{\alpha}_{1j} \ldots \sum \alpha_{1j} \overline{\alpha}_{kj} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum \alpha_{kj} \cdot \overline{\alpha}_{1j} \ldots \sum \alpha_{kj} \cdot \overline{\alpha}_{kj} \end{vmatrix} = D \cdot \overline{D} = |D|^2,$$

trong đó

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1k} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \alpha_{k1} & \ldots & \alpha_{kk} \end{vmatrix};$$

Vậy $G(x_1, \ldots, x_k) \geqslant 0$ và $G(x_1, \ldots, x_k) = 0$ khi và chỉ khi hệ $x_1, \ldots, x_k$ phụ thuộc tuyến tính.

b) Suy ra từ cách biểu thị tuyến tính của y_j qua x_j và y_t, $t < i$ và do đó từ cách biểu thị tuyến tính của y_j qua x_i, $i \leqslant j$.

c) Thật vậy, nếu $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l$ phụ thuộc tuyến tính thì bất đẳng thức đó là hiển nhiên. Giả sử hệ đó độc lập tuyến tính. Trực giao hóa hệ đó ta được hệ vectơ $u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_l$, còn trực giao hóa hệ $y_1, \ldots, y_l$ ta được hệ $e_1, \ldots, e_l$. Vectơ e_i trực giao với không gian con $L(y_1, \ldots, y_{i-1})$, còn v_i trực giao với không gian con $L(x_1, \ldots, x_k, y_1 \ldots y_{i-1})$. Ta có $\| v_i \| \leqslant \| e_i \|$ và dấu bằng xảy ra khi $\langle x_j, y_i \rangle = 0$, $j = 1, \ldots, k$; $i = 1, \ldots, l$. Theo câu b) ta có $G(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l) = (\| u_1 \|^2 \ldots \| u_k \|^2)(\| v_1 \|^2 \ldots \| v_l \|^2 \leqslant (\| u_1 \|^2 \ldots \| u_k \|^2)(\| e_1 \|^2 \ldots \| e_l \|^2) = G(x_1, \ldots, x_k) . G(y_1, \ldots, y_l)$. Nếu $\langle x_j, y_i \rangle = 0$ thì $\| v_i \| = \| e_i \|$ và ta có dấu bằng, còn nếu $x_1, \ldots, x_k$ hoặc $y_1, \ldots, y_l$ phụ thuộc tuyến tính thì vế phải bằng không, mà vế trái không âm, do đó ta cũng có dấu bằng. Đảo lại nếu ta có.

$$G(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l) = G(x_1, \ldots, x_k)\, G(y_1, \ldots, y_l),$$

thì theo trên, $\| u_1 \|^2 \ldots \| u_k \|^2 . \| v_1 \|^2 \ldots \| v_l \|^2 = \| u_1 \|^2 \ldots \| u_k \|^2 \; \| e_1 \|^2 \ldots \| e_l \|^2$, do đó hoặc tồn tại $j \leqslant k$ sao cho $\| u_j \| = 0$, tức là $x_1, \ldots, x_k$ phụ thuộc tuyến tính, hoặc tồn tại $i \leqslant l$ sao cho $\| v_i \| = \| e_i \| = 0$, tức là $y_1, \ldots, y_l$ phụ thuộc tuyến tính, hoặc $\| v_i \| = \| e_i \|$, $i = 1, \ldots, l$, từ đó mọi e_i trực giao với $x_1, \ldots, x_k$ hay y_i trực giao với $x_1, \ldots, x_k$.

136. a) Vì F hữu hạn chiều nên vectơ $x - x_0 \in E$ biểu diễn được dưới dạng $x - x_0 = y + z$, $y \in F$, $z \in F^*$ (xem bài 128).

Với mọi $v \in D$ ta có $v - x_0 \in L$, do đó

$$\langle (x - x_0) - y,\ y - (v - x_0) \rangle = 0$$

vì $(x - x_0) - y = z \in L^*,\ y - (v - x_0) \in L$

Từ đó và từ đẳng thức $x - v = [(x - x_0) - y] + [y - (v - x_0)]$ ta có

$$\| x - v \|^2 = \| (x - x_0) - y \|^2 + \| y - (v - x_0) \|^2 =$$
$$= \| z \|^2 + \| y - (v - x_0) \|^2 \geqslant \| z \|^2.$$

Vì vậy $\| x - v \|$ đạt giá trị bé nhất $\| z \|$ khi

$$y - (v - x_0) = 0, \text{ tức là } v = y + x_0.$$

b) Theo câu a) ta có $d^2 = \| z \|^2$, $z = (x - x_0) - y$, $y \in F$, $z \in F^*$. Giả sử $y = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i$. Từ cột cuối của định thức Gram $G(e_1, \ldots, e_k, x - x_0)$ ta trừ đi các cột đầu đã nhân với α_i tương ứng. Thế thì tại dòng i cột $k + 1$ ta được 0 với mọi $1 \leqslant i \leqslant k$, còn tại dòng $k + 1$ cột $k + 1$ ta được $\langle x - x_0, z \rangle = \langle z, z \rangle$. Khai triển theo cột cuối ta được biểu thức phải tìm.

137. a) Các tính chất của tích vô hướng thử thấy dễ dàng. Chẳng hạn nếu

$$\langle f, f \rangle = \int_0^{2\pi} [f(x)]^2 dx = 0.$$

thì vì hàm $f^2(x)$ liên tục và dương nên nếu tích phân đó bằng không thì $f = 0$.

p) Ta có

$$\int_0^{2\pi} 1\,.\cos nx\,dx = \left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{2\pi} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} 1\,.\sin mx\,dx = \left[-\frac{\cos mx}{m}\right]_0^{2\pi} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx\,.\cos mx\,dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(n+m)x + \cos(n-m)x}{2}\,dx = 0$$

nếu $n \neq m$,

$$\int_0^{2\pi} \sin nx\,.\sin mx\,dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(n-m)x - \cos(n+m)x}{2}\,dx = 0,$$

nếu $n \neq m$,

$$\int_0^{2\pi} \cos nx\,.\sin mx\,dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\sin(m+n)x - \sin(m-n)x}{2}\,dx = 0.$$

Vậy 1, $\cos nx$, $\sin mx$, n, m nguyên ≥ 0 trực giao.

c) Một cơ sở trực chuẩn của F gồm $2n+1$ hàm $e_k(x)$ dạng

$$e_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}; \quad e_{2k}(x) = \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, 1 \leqslant k \leqslant n,$$

$$e_{2k-1}(x) = \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, 1 \leqslant k \leqslant n.$$

138. Điều kiện ắt có là hiển nhiên với $\| x \|^2 = \langle x, x \rangle$. Ta chứng minh điều kiện đủ. Nếu chuẩn trong E thỏa mãn điều kiện đã cho, thì ta đặt

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\| x + y \|^2 - \| x - y \|^2) \qquad (1)$$

và chứng minh các tính chất của tích vô hướng đều thỏa mãn. Chú ý rằng

$$\langle x, x \rangle = \frac{1}{2} (\| 2x \|^2 - \| x - x \|^2) = \| x \|^2,$$

nên chuẩn đã cho trùng với chuẩn trong không gian Oclit mà tích vô hướng định nghĩa bởi (1).

Trước hết rõ ràng $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ và $\langle x, x \rangle > 0$ nếu $x \neq 0$. Để chứng minh $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$ ta xét hàm ba biến

$$\varphi(x_1, x_2, y) = 4(\langle x_1 + x_2, y \rangle - \langle x_1, y \rangle - \langle x_2, y \rangle)$$

và chứng minh hàm đó đồng nhất bằng không. Ta có

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, y) = & \| x_1 + x_2 + y \|^2 - \| x_1 + x_2 - y \|^2 - \\ & - \| x_1 + y \|^2 + \| x_1 - y \|^2 - \| x_2 + y \|^2 + \\ & + \| x_2 - y \|^2. \end{aligned} \qquad (2)$$

Theo giả thiết

$$\| x_1 + x_2 \pm y \|^2 = 2 \| x_1 \pm y \|^2 + 2 \| x_2 \|^2 - \\ - \| x_1 \pm y - x_2 \|^2,$$

do đó thay vào biểu thức của $\varphi(x_1, x_2, y)$ ta được

$$\varphi(x_1, x_2, y) = - \| x_1 + y - x_2 \|^2 + \| x_1 - y - x_2 \|^2 + \\ + \| x_1 + y \|^2 - \| x_1 - y \|^2 - \| x_2 + y \|^2 + \\ + \| x_2 - y \|^2. \qquad (3)$$

Lấy một nửa biểu thức (2) cộng với một nửa biểu thức (3) ta được

$$\varphi(x_1, x_2, y) = \frac{1}{2} (\| x_2 + y + x_1 \|^2 + \| x_2 + y - x_2 \|^2) - \\ - \frac{1}{2} (\| x_2 - y + x_1 \|^2 + \| x_2 - y - x_1 \|^2) - \\ - \| x_2 + y \|^2 + \| x_2 - y \|^2.$$

Theo giả thiết dấu ngoặc thứ nhất bằng $\| x_2 + y \|^2 + \| x_1 \|^2$, còn dấu ngoặc thứ hai bằng $- \| x_2 - y \|^2 - \| x_1 \|^2$, do đó $\varphi(x_1, x_2, y)$ đồng nhất bằng 0.

Để chứng minh $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ ta xét hàm $\psi(\lambda) = \langle \lambda x, y \rangle - \lambda \langle x, y \rangle$, với λ là một số thực tùy ý.

Từ định nghĩa của $\langle x, y \rangle$ trong (1) ta có ngay

$$\psi(0) = \frac{1}{4} (\| y \|^2 - \| y \|^2) = 0 \text{ và } \psi(-1) = 0.$$

Vì vậy với mọi số nguyên n ta có (trong đó sign n là dấu của n)

$$\langle nx, y \rangle = \langle \text{sign } n(x + \ldots + x), y \rangle = \\ = \text{sign } n[\langle x, y \rangle + \ldots + \langle x, y \rangle] = \\ = | n | \text{ sign } n \langle x, y \rangle = n \langle x, y \rangle.$$

tức là $\varphi(c) = 0$. Với số hữu tỉ $c = \frac{p}{q}$, p, q nguyên ta có

$$\left\langle \frac{p}{q} x, y \right\rangle = p \left\langle \frac{1}{q} x, y \right\rangle = \frac{p}{q} q \left\langle \frac{1}{q} x, y \right\rangle =$$

$$= \frac{p}{q} \langle x, y \rangle .$$

tức là $\varphi(c) = 0$ với mọi số hữu tỉ c.

Vì hàm φ liên tục và triệt tiêu tại mọi số hữu tỉ nên $\varphi(\lambda) = 0$, tức là $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ với mọi số thực λ.

139. Nếu E và F là hai không gian Ơclit hữu hạn chiều đẳng cấu, và $\varphi : E \to F$ là ánh xạ đẳng cấu thì ảnh của một cơ sở của E là một cơ sở của F, do đó $\dim E = \dim F$. Đảo lại, giả sử E và F là hai không gian Ơclit hữu hạn chiều mà $\dim E = \dim F = n$. Chọn trong E một cơ sở trực chuẩn $e_1, \ldots, e_n$ và trong F một cơ sở trực chuẩn $f_1, \ldots, f_n$. Lập ánh xạ $\varphi : E \to F$ đặt tương ứng với mỗi véctơ $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ với vectơ $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$. Rõ ràng φ là ánh xạ đẳng cấu từ không gian vectơ E tới không gian vectơ F. Nếu $x' = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$ thì $\varphi(x') = \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i$, do đó

$$\langle x, x' \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = \langle \varphi(x), \varphi(x') \rangle .$$

b) Trước hết nếu E là một không gian Ơclit có cơ sở đếm được $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ thì theo bài tập 132, E sẽ có một cơ sở trực chuẩn $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ Trong l_2 có một

cơ sở trực chuẩn $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Lập ánh xạ $\varphi : E \to F$ như trong câu a): vectơ $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$ đặt tương ứng với

vectơ $\varphi(x) = z = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i z_i$.

Thế thì φ là một ánh xạ đẳng cấu từ không gian Ơclit E tới không gian Ơclit F.

140. b) Nếu x là tổ hợp tuyến tính của tập $A \setminus \{x\}$ thì

$$x = \sum_{y \in A \setminus \{x\}} \alpha_y \cdot y, \text{ do đó } -x + \sum_{y \in A \setminus \{x\}} \alpha_y \cdot y = 0.$$

chứng tỏ tập A độc lập tuyến tính.

Ví dụ sau đây chứng tỏ có tập phụ thuộc tuyến tính mà không có phần tử nào của nó là tổ hợp tuyến tính của các phần tử còn lại. Xem tập số nguyên **Z** như một môđun trên chính nó. Với hai số nguyên tố $p_1, p_2 \in \mathbf{Z}$, $p_1 \neq p_2$ ta có

$$(-p_2)p_1 + p_1 p_2 = 0.$$

chứng tỏ tập $\{p_1, p_2\}$ phụ thuộc tuyến tính, nhưng không tồn tại số nguyên a, b nào để $p_1 = ap_2$ hoặc $p_2 = ap_1$.

c) Chẳng hạn tập số phức **C** có thể xem là một môđun trên chính nó hoặc một môđun trên trường số thực **R**. Tập $\{1, i\}$ độc lập tuyến tính trên **R** nhưng phụ thuộc tuyến tính trên **C**.

141. a) Lập ánh xạ $\varphi : M \to M'$ đặt tương ứng mỗi phần tử $x \in M$, $x = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i$ với phần tử $y \in M'$ mà

$y = \sum_{i \in I}' \alpha_i y_i$, thì φ là một đồng cấu môđun và $\varphi(x_i) = y_i$, $i \in I$

Nếu $\psi : M \to M'$ là một đồng cấu và $\psi(x_i) = y_i$, $i \in I$ thì

$$\psi(x) = \psi\left(\sum_{i \in I}' \alpha_i x_i\right) = \sum_{i \in I}' \alpha_i \psi(x_i) =$$

$$= \sum_{i \in I}' \alpha_i y_i = \varphi(x), \text{ do đó } \varphi = \psi .$$

b) Nếu M và M' là hai môđun tự do mà cơ sở có cùng lực lượng, chẳng hạn M có cơ sở $\{x_i\}_{i \in I}$ và M' có cơ sở $\{y_i\}_{i \in I}$ thì ánh xạ $\varphi : M \to M'$ như trong câu a) chính là một đẳng cấu.

142. a) Giả sử vành A gồm các số phức $a + b\sqrt{3}\,i$, $a, b \in \mathbb{Z}$. M là iđêan của A sinh bởi 2 và $1 + \sqrt{3}\,i$. Thế thì M là một môđun trên vành A với phép cộng và nhân số phức thông thường. Chú ý rằng trong M mọi tập độc lập tuyến tính chỉ gồm một phần tử, mặt khác vì M không phải là một iđêan chính của vành A nên M không có hệ sinh nào gồm một phần tử. Vậy môđun M không có cơ sở.

b) Lấy A là vành Z_6 các số nguyên đồng dư mod 6. xem như một môđun trên chính nó, $A = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$ trong đó $\overline{m}$ là lớp đồng dư chứa m, $0 \leqslant m \leqslant 5$. Rõ ràng môđun A có cơ sở là $\overline{1}$ nên A là một môđun tự do. Mặt khác phần tử $\overline{3} \neq \overline{0}$ nhưng tập $\{\overline{3}\}$ gồm một phần tử $\overline{3}$ không độc lập tuyến tính, vì $\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{0}$.

143. a) Xét ví dụ trong câu a) bài tập trên. A là vành các số phức $a + b\sqrt{3}\,i$, $a, b \in \mathbb{Z}$ thì A xem như mộ

môđun trên chính nó sẽ là một môđun xiclic sinh bởi phần tử 1. M là iđêan của vành A sinh bởi 2 và $1 + \sqrt{3}\, i$ sẽ là môđun con của môđun A nhưng M không phải là môđun xiclic.

b) Giả sử M là một môđun xiclic trên vành số nguyên $\mathbb{Z}$ và M sinh bởi phần tử a, N là một môđun con của M. Giả sử n là số nguyên dương bé nhất sao cho $na \in N$. Ta chứng minh N là một môđun xiclic trên $\mathbb{Z}$ sinh bởi phần tử na. Thật vậy, với mọi số nguyên $m \in \mathbb{Z}$ mà $ma \in N$, ta có

$$m = nq + r, \quad 0 \leqslant r < n.$$

do đó :

$$ma = (nq)a + ra = q(na) + ra.$$

Vậy $ra = ma - q(na) \in N$, do đó nếu $r \neq 0$ thì trái với cách chọn n. Vậy mọi phần tử $ma \in N$ đều có dạng $ma = q(na)$, tức là môđun N sinh bởi na.

144. a) Giả sử $(x) = (y)$. Thế thì $y = 1 \,.\, y = cx$, $c \in A$, và $x = 1 \,.\, x = dy$, $d \in A$. Bây giờ giả sử $a \in 0(x)$, nghĩa là $ax = 0$. Thế thì vì A giao hoán,

$$ay = a(cx) = (ac)x = (ca)x = c(ax) = 0.$$

Vậy $a \in 0(y)$, do đó $0(x) \subset 0(y)$. Do đối xứng, ta có $0(y) \subset 0(x)$ và vì vậy $0(x) = 0(y)$.

b) Xét tập $M = \{e, x, y, z\}$ với phép cộng cho bởi bảng sau :

+	e	x	y	z
e	e	x	y	z
x	x	e	z	y
y	y	z	e	x
z	z	y	x	e

Dễ thấy rằng M là môđun trên vành số nguyên Z, trong đó nx hiểu là bội n của x, phần tử không chính là e. Môđun con xiclic sinh bởi x là $(x) = \{e, x\}$, còn môđun con xiclic sinh bởi y là $(y) = \{e, y\} \neq (x)$. Mặt khác $0(x) = 0(y) = 2Z$.

c) Ánh xạ $\varphi : (x) \to A/0(x)$ đặt tương ứng phần tử ax, $a \in A$ với lớp $a + 0(x)$ là một đẳng cấu môđun.

145. c) Theo giả thiết hệ thức $\sum_{i \in I} \lambda_i \overline{x_i} = 0$ kéo theo $\lambda_i = 0$ với mọi $i \in I$. Do đó nếu trong mỗi lớp $\overline{x_i}$ chọn một phần tử y_i tùy ý thì $\sum_{i \in I} y_i \lambda_i \in M_1$ và họ $(y_i)_{i \in I}$ độc lập tuyến tính. Hơn nữa từ điều trên cũng suy ra rằng nếu M_2 là môđun con của M sinh bởi $(y_i)_{i \in I}$ thì $M_1 \cap M_2 = \{0\}$. Cuối cùng, vì mỗi phần tử thuộc M/M_1 là một tổ hợp tuyến tính của họ $(\overline{x_i})_{i \in I}$, nên mỗi $x \in M$ nằm trong một lớp (theo M_1) với một tổ hợp tuyến tính của họ $(y_i)_{i \in I}$, do đó hiệu của chúng thuộc M_1. Vậy $M = M_1 + M_2$.

146. Chú ý rằng nếu xem vành số nguyên Z như một môđun trên chính nó thì mỗi môđun con M của môđun Z phải là một iđêan của vành Z. Nhưng hai iđêan bất kỳ của vành số nguyên Z đều có giao khác không, do đó M không thể là hạng tử trực tiếp của môđun Z.

147. Với mọi $x \neq 0$ thuộc M ta có $N = Ax$ là một môđun con của M, nên nếu M là một môđun đơn thì $Ax = \{0\}$ hoặc $Ax = M$.

Giả sử $Ax = \{0\}$. Lúc đó tập $X = \{mx \mid m \in Z\}$ là một môđun con của M nên $X = M$ (vì có $x \in X$, $x \neq 0$). Nếu tập X vô hạn thì nó chứa một môđun con thực sự

là $2A = \{2mx \mid m \in Z\}$. Vì vậy tập X hữu hạn và do đó tồn tại số nguyên bé nhất n sao cho $nx = 0$. Nếu n không nguyên tố, chẳng hạn $n = kl$ thì $X' = \{mlx \mid m \in Z\}$ là một môđun con thực sự của X. Vậy $n = p$ nguyên tố và M gồm có p phần tử.

148. Giả sử $f : M \to N$ là một đồng cấu từ môđun đơn M tới môđun đơn N. Vì $f(M)$ là một môđun con của N nên $f(M) = \{0\}$ hoặc $f(M) = N$. Nếu f không phải là đồng cấu không thì $f(M) = N$, nghĩa là f là một toàn cấu. Mặt khác $\text{Ker}f = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$ là một môđun con của M, và vì $f \neq 0$ nên ta có $\text{Ker}f = \{0\}$. Vậy f là một đẳng cấu.

149. a) Xem bài tập **111**.

b) Giả sử M là một môđun nửa đơn, N là một môđun con của M. Ta chứng minh rằng mọi môđun con N_1 của N là hạng tử trực tiếp của N. Vì N_1 là một môđun con của M nên :

$$M = N_1 \oplus M_1.$$

Giả sử $N' = M_1 \cap N$. Thế thì $N = N_1 \oplus N'_1$.

c) Giả sử $N \neq \{0\}$ là một môđun con của môđun nửa đơn M trên một vành A. Với mỗi $x \in N$, $x \neq 0$ ta có Ax là môđun con xiclic của N sinh bởi x. Nếu xem A là một môđun trên chính nó thì đồng cấu $f : A \to Ax$, $a \mapsto ax$, $a \in A$ có $K = \text{Ker}f$ là một iđêan trái của vành A. Theo bổ đề Zoóc, K được chứa trong một iđêan trái với tối đại B của vành A. Thế thì Bx là một môđun con tối đại của môđun Ax và theo câu b), Bx cũng là một hạng tử trực tiếp của Ax :

$$Ax = Bx \oplus N'.$$

Bx tối đại trong Ax nên N' là một môđun con đơn của Ax, tức là của N.

d) Theo câu c) môđun nửa đơn M chứa các môđun con đơn. Giả sử M_0 là tổng của tất cả các môđun con đơn của

môđun M. Nếu $M_0 \neq M$ thì $M = M_0 \oplus N$, trong đó $N \neq \{0\}$ và theo câu c) N chứa một môđun con đơn, trái với định nghĩa của M_0. Vậy $M = M_0$ là tổng trực tiếp các môđun con đơn.

150. a) Giả sử $A = Z^\infty$ là tập tất cả các dãy vô hạn số nguyên

$$\alpha = (x_1, x_2, ..., x_n, ...), \quad x_i \in Z.$$

Nếu định nghĩa phép cộng và phép nhân các dãy theo từng thành phần thì A là một vành giao hoán chứa đơn vị $\varepsilon = (1, 1, ..., 1)$. Do đó nếu xem A là một môđun trên chính nó thì A là một môđun xiclic sinh bởi ε. Xét B là tập con của A gồm tất cả các dãy α trong đó chỉ có một số hữu hạn $x_i \neq 0$. Rõ ràng B cũng là một môđun trên vành A và là môđun con của môđun xiclic A. Tuy nhiên B không phải là một môđun hữu hạn sinh. Thật vậy, giả sử B có hệ sinh hữu hạn $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ và n là chỉ số lớn nhất của các thành phần khác không của α_i, $i = 1, ..., k$ thì một vectơ thuộc B có thành phần thứ $n + 1$ khác không sẽ không biểu thị tuyến tính được qua hệ $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$.

b) Chứng minh tương tự câu c) bài tập 145.

151. (a) $\Rightarrow$ (b). Giả sử có chuỗi môđun con của M :

$$M_1 \subset M_2 \subset ...$$

Xét $N = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$. Theo giả thiết môđun con N hữu hạn sinh, chẳng hạn các phần tử sinh là $x_1, x_2, ..., x_k$. Mỗi phần tử x_j thuộc một môđun con M_{i_j} nào đó, vì vậy tồn tại một chỉ số n sao cho :

$$x_1, x_2, ..., x_k \in M_n.$$

Thế thì $N = M_n$, do đó $M_n = M_{n+1} = ...$

(b) ⇒ (c). Giả sử N_1 là một phần tử của tập S. Nếu N_1 chưa tối đại thì nó được chứa thực sự trong một môđun con N_2. Theo quy nạp, nếu đã có môđun con N_i và nếu N_i chưa tối đại thì N_i được chứa thực sự trong một môđun con N_{i+1}, và như vậy ta sẽ xây dựng được một chuỗi tăng vô hạn các môđun con của M, trái với (b).

(c) ⇒ (a). Giả sử N là một môđun con của M, x_0 là một phần tử thuộc N. Ta ký hiệu môđun con sinh bởi x_0 là (x_0). Nếu $(x_0) \neq N$ thì tồn tại $x_1 \in N$, $x_1 \notin (x_0)$. Tiếp tục theo quy nạp ta xây dựng được chuỗi tăng các môđun con của N:

$$(x_0) \subset (x_0, x_1) \subset (x_0, x_1, x_2) \subset \dots$$

Tập các môđun con đó chứa phần tử tối đại, chẳng hạn $(x_0, x_1, \dots, x_k)$, rõ ràng môđun con này phải bằng N, do đó N là môđun hữu hạn sinh.

152. a) Giả sử x và y là hai phần tử tuần hoàn của môđun M, $a \in 0(x)$, $b \in 0(y)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Thế thì

$$\begin{aligned} ab(x + y) &= (ab)x + (ab)y = \\ &= (ba)x + (ab)y = \\ &= b(ax) + a(by) = 0. \end{aligned}$$

Vì $ab \neq 0$ nên $x + y$ là một phần tử tuần hoàn. Tương tự, với mọi $c \in A$, cy cũng là một phần tử tuần hoàn.

b) Giả sử $A = Z \times Z$ là tập các cặp số nguyên với phép cộng và nhân theo từng thành phần. Thế thì A là một vành giao hoán chứa ước của không là các cặp $(m, 0)$, $(0, n)$. Coi A như một môđun trên chính nó và xét $x = (1, 0)$, $y = (0, 1)$ là hai phần tử thuộc môđun A. Rõ ràng $0(x) \neq 0$ và $0(y) \neq 0$, nhưng $x + y = (1, 1)$ có $0(x + y) = 0$. Vậy tập các phần tử tuần hoàn của môđun A không lập thành một môđun con.

153. a) Xét ánh xạ $f : M_1 \to (M_1 + M_2)/M_2$ đặt tương ứng mỗi phần tử $x \in M$ với lớp ghép $x + M_2$. Dễ thấy

rằng f là một toàn cấu môđun và đồng thời $\mathrm{Ker} f = M_1 \cap$ $\cap M_2$. Do đó $M_1 / M_1 \cap M_2$ đẳng cấu với $(M_1 + M_2)/ M_2$.

b) Xét ánh xạ $g : M/M_1 \to M/M_2$ đặt tương ứng mỗi lớp ghép $x + M_1$ ($x \in M$) với lớp ghép $x + M_2$. Ánh xạ g cũng là một toàn cấu môđun và $\mathrm{Ker} g$ gồm các lớp ghép $x + M_1$ mà $x \in M_2$, tức là $\mathrm{Ker} g = M_2/M_1$. Do đó ta có đẳng cấu cần tìm.

154. Trước hết ta chứng minh rằng nếu thỏa mãn điều kiện trong câu a) thì ta có b) rồi sau đó chứng minh a). Giả sử tồn tại $\varphi : M'' \to M$ sao cho $g\varphi = \varepsilon_{M''}$. Với mọi $x \in M$ ta có

$$g(x - \varphi(g(x))) = g(x) - g\varphi(g(x)) =$$
$$= g(x) - g(x) = 0,$$

do đó $x - \varphi(g(x)) \in \mathrm{Ker} g$. Vậy

$$M = \mathrm{Ker} g + \mathrm{Im}\varphi.$$

Ta chứng minh đó là tổng trực tiếp. Giả sử với $x \in M$

$$x = y + z,\ y \in \mathrm{Ker} g,\ z \in \mathrm{Im}\varphi. \qquad (1)$$

Thế thì $z = \varphi(w)$, $w \in M''$, do đó

$$g(x) = g(y + z) = g(y) + g(z) = g(\varphi(x)) = w.$$

Vậy phần tử w được xác định duy nhất bởi phần tử x, do đó z cũng được xác định duy nhất bởi x. Vậy sự phân tích (1) là duy nhất, và $M = \mathrm{Ker} g \oplus \mathrm{Im}\varphi$. Tương tự, nếu tồn tại $\psi : M \to M'$ sao cho $\psi f = \varepsilon_{M'}$ thì $M = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker}\psi$.

Bây giờ giả sử tồn tại $\varphi : M'' \to M$ sao cho $g\varphi = \varepsilon_{M''}$. Thế thì theo trên

$$M = \mathrm{Ker} g \oplus \mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Im}\varphi,$$

vì theo giả thiết $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} g$.

Lập ánh xạ $\psi : M \to M'$ như sau. Với $x \in M$, giả sử

$$x = x_1 + x_2,\ x_1 \in \mathrm{Im} f,\ x_2 \in \mathrm{Im}\varphi,$$

thì đặt $\psi(x) = f^{-1}(x_1)$. Rõ ràng ánh xạ ψ hoàn toàn xác định, ψ là một đồng cấu và $\psi f = \varepsilon_{M'}$.

CHƯƠNG IV

ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH VÀ MA TRẬN

155. b) f suy biến khi và chỉ khi $a = 0$ hoặc $a = -3$

c) Với $a = 0$ thì

$\operatorname{Ker} f = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$.

$\operatorname{Im} f = \{(x, x, x) \mid x$ là số thực tùy ý$\}$.

Với $a = -3$ thì

$\operatorname{Ker} f = \{(x, x, x) \mid x$ là số thực tùy ý$\}$;

$\operatorname{Im} f = \{(x, y, -x - y) \mid x, y$ là các số thực tùy ý$\}$.

156. a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

b) $\operatorname{rank} f = 3$, $\operatorname{def} f = 1$.

157. a) $\operatorname{rank} f = 3$, $\operatorname{def} f = 1$.

$\operatorname{Ker} f = \{-27ae_1 - 7ae_2 + ae_3 + 4ae_4 \mid a \in \mathbb{R}$ tùy ý$\}$.

$\operatorname{Im} f = \{b_1e_1 - b_2e_2 + b_3e_3 + (3b_1 - b_2 + 2b_3)\, e_4 \mid b_1, b_2, b_3$ là các số thực tùy ý$\}$.

b)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -12 & -13 \\ 2 & 8 & 16 & 17 \\ -1 & -4 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

158. a) $\operatorname{rank} f = \dim f(V) = \dim V/\operatorname{Ker} f = \dim V -$

$$- \dim \operatorname{Ker} f = \dim V - \operatorname{def} f.$$

c) Ký hiệu $L_0 = L \cap \operatorname{Ker} f$. Ta chứng minh

$$\dim L = \dim f(L) + \dim L_0. \qquad (1)$$

Thật vậy, giả sử $x_1, \ldots, x_k$ là một cơ sở của L_0. Bổ sung các vectơ $y_1, \ldots, y_l$ để được một cơ sở của L. Thế thì $f(y_1), \ldots, f(y_l)$ là một cơ sở của $f(L)$ vì rõ ràng nó là một hệ sinh của $f(L)$ và hệ đó độc lập tuyến tính vì nếu

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i f(y_i) = 0 \quad \text{thì} \quad \sum_{i=1}^{l} \alpha_i y_i \in L_0,$$

tức là $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i y_i = \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_j$, do đó $\alpha_i = 0$, $i = 1, \ldots, l$.

Từ đẳng thức vừa chứng minh và từ chỗ $L_0 \subseteq \operatorname{Ker} f$ ta có $\dim L = \dim f(L) + \dim L_0 \leqslant \dim f(L) + \dim \operatorname{Ker} f$.

Vậy $\dim f(L) \leqslant \dim L \leqslant \dim f(L) + \operatorname{def} f$.

d) Đặt $L' = f^{-1}(L)$. Ta có $\operatorname{Ker} f \subset f^{-1}(L) = L'$, do đó $L' \cap \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f$. Vì vậy nếu thay L bởi L' vào đẳng thức (1) ta được

$$\dim L' = \dim f(L') + \operatorname{def} f. \qquad (2)$$

Vì $f(L') \subseteq L$ nên $\dim f(L') \leqslant \dim L$, do đó theo (2)

$$\dim L' \leqslant \dim L + \operatorname{def} f.$$

Mặt khác vì $f(L') = L \cap f(V)$, do đó

$$\dim f(L') = \dim L + \dim f(V) - \dim (L + f(V)) \geqslant$$
$$\geqslant \dim L + \dim f(V) - \dim V = \dim L - \operatorname{def} f.$$

Vì vậy từ (2) ta lại được

$$\dim L' = \dim f(L') + \operatorname{def} f \geqslant \dim L.$$

c) Vì V là một không gian hữu hạn chiều nên với mọi không gian con $L \subset V$ ta có $\dim L \leqslant \dim V$, trong đó dấu bằng chỉ xảy ra khi $L = V$. Do đó

$\operatorname{rank} f = \dim V \Leftrightarrow f$ là một toàn cấu.

Mặt khác theo câu a):

$\operatorname{rank} f = \dim V \Leftrightarrow \operatorname{def} f = 0 \Leftrightarrow f$ là một đơn cấu, vì vậy một trong các điều kiện đó đều cho ta f là một đẳng cấu.

159. a) Rõ ràng nếu $f(V) = V$ thì với mọi phép biến đổi tuyến tính $g \neq 0$ của V, ta có $gf \neq 0$. Nếu $f(V) = V' \neq V$ thì giả sử $V = V' \oplus W$, W là bù trực tiếp của V'. Xét ánh xạ $g : V \to V$ mà với mỗi $x \in V$, $x = x' + y$, $x' \in V'$, $y \in W$ ta đặt $g(x) = y$. Thế thì g là một phép biến đổi tuyến tính của V, $g \neq 0$ và $gf = 0$.

b) Nếu tích fg là một ánh xạ đồng nhất thì g phải là một đơn cấu từ V tới V, do đó theo bài trên g cũng là một đẳng cấu. Tương tự f là một đẳng cấu ngược của g.

160. a) Rõ ràng f không phải là một đơn cấu nên không phải là một tự đẳng cấu của V. Ta chứng minh f là một toàn cấu. Dễ thấy rằng f là một ánh xạ tuyến tính. Với mỗi $x \in E$ tồn tại k nguyên dương để

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i,\ \alpha_i \in P,\ \alpha_k \neq 0.$$

Lấy $y = \beta_1 x_1 + \alpha_1 x_2 + \ldots + \beta_k x_{2k-1} + \alpha_k x_{2k}$, trong đó $\beta_i \in P$ tùy ý. Thế thì $f(y) = x$.

b) Lấy $g : V \to V$ mà $g(x_i) = x_{2i}$, $i = 1, 2, \ldots$ Rõ ràng g là một đơn cấu, fg là ánh xạ đồng nhất của V mà g không phải là một toàn cấu vì $x_{2i+1} \notin g(V)$.

161. a) Các hàm $1, \cos t, \sin t, \ldots, \cos nt, \sin nt$ lập thành một cơ sở của V, do đó $\dim V = 2n + 1$.

b) Bằng quy nạp theo p, dễ dàng chứng tỏ rằng

$$[f^p(x)](t) = x\left(t + p\frac{\pi}{4}\right),$$

do đó $[f^8(x)](t) = x(t + 2\pi) = x(t)$, tức là f^8 là ánh xạ đồng nhất.

c) Dễ dàng thấy rằng ánh xạ $g : V \to V$ mà

$$[g(x)](t) = x\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

là ánh xạ ngược của f, do đó f là một song ánh.

Vậy $\operatorname{Ker} f = 0$ và $\operatorname{Im} f = V$.

162. a) Giả sử M là bù trực tiếp của L trong V, tức là $V = L \oplus M$. Mỗi vectơ $x \in V$ biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng

$$x = y + z, \quad y \in L, \quad z \in M.$$

Ánh xạ $f : V \to V$ mà $f(x) = y$ là một ánh xạ tuyến tính và $\operatorname{Im} f = L$.

b) Ánh xạ $g : V \to V$ mà $g(x) = z$ (xem câu a) là một ánh xạ tuyến tính và $\operatorname{Ker} g = L$.

163. a) Lấy cơ sở $x_1, \ldots, x_q$ của $L \cap H$ và bổ sung thành cơ sở $x_1, \ldots, x_q, x_{q+1}, \ldots, x_p$ của L. Thế thì $f(x_{q+1}), \ldots, f(x_p)$ là cơ sở của $f(L)$, do đó $\dim f(L) = p - q$.

b) Lấy cơ sở $f(y_1), \ldots, f(y_r)$ của $M \cap f(E)$ và cơ sở $z_1, \ldots, z_s$ của H. Thế thì $y_1, \ldots, y_r, z_1, \ldots, z_s$ là một cơ sở của $f^{-1}(M)$, do đó

$$\dim f^{-1}(M) = r + s = r + m - \operatorname{rank} f,$$

vì

$$s = \dim \operatorname{Ker} f = m - \operatorname{rank} f.$$

164. $\operatorname{rank}(u+v)=\dim(u(V)+v(V))\leqslant\dim u(V)+$ $+\dim v(V)=\operatorname{rank} u+\operatorname{rank} v.$

$\operatorname{rank}(uv)=\dim uv(V)=\dim u[v(V)]\leqslant\dim v(V)$ và $\leqslant\dim v(V)$.

Vậy $\operatorname{rank}(uv)\leqslant\min(\operatorname{rank} u, \operatorname{rank} v)$.

$\operatorname{def}(uv)=\dim\operatorname{Ker}(uv)$. Rõ ràng $\operatorname{Ker}(uv)\supset\operatorname{Ker} v$. Giả sử $\dim\operatorname{Ker} v=k$, $\dim\operatorname{Ker}(uv)=r$, và $x_1,\dots,x_k$ là một cơ sở của $\operatorname{Ker} v$. Bổ sung tới cơ sở của $\operatorname{Ker} uv$ là $x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_r$. Ta chứng minh $v(x_{k+1}),\dots,v(x_r)$ là một hệ thống độc lập tuyến tính thuộc $\operatorname{Ker} u$.
Thật vậy, nếu

$$z_{k+1}v(x_{k+1})+\dots+z_r v(x_r)=0$$

thì

$$v(z_{k+1}x_{k+1}+\dots+z_r x_r)=0,$$

do đó $\quad y=z_{k+1}x_{k+1}+\dots z_r x_r\in\operatorname{Ker} v.$

Vì vậy ta có $y=0$, từ đó suy ra $z_{k+1}=\dots=z_r=0$.
Như vậy $\dim\operatorname{Ker} u\geqslant r-k$, do đó

$\dim\operatorname{Ker}(uv)\leqslant\dim\operatorname{Ker} u+\dim\operatorname{Ker} v$, hay $\operatorname{def}(uv)\leqslant\operatorname{def} u+\operatorname{def} v$.

165. Ta có

$$\operatorname{rank}(vu)=\dim v(u(E))=\dim(u(E)/u(E)\cap\operatorname{Ker} v)=$$
$$=\dim u(E)-\dim(u(E)\cap\operatorname{Ker} v).$$

Do đó $\dim(u(E)\cap\operatorname{Ker} v)=\operatorname{rank} u-\operatorname{rank}(vu)$; Nếu $\dim F=n$ thì $\dim\operatorname{Ker} v=n-\operatorname{rank} v$, do đó $\operatorname{rank} u-\operatorname{rank}(vu)=\dim(u(E)\cap\operatorname{Ker} v)\leqslant\dim\operatorname{Ker} v=n-\operatorname{rank} v$.

Vậy $\operatorname{rank}(vu)\geqslant\operatorname{rank} u+\operatorname{rank} v-n$. Vì $\operatorname{rank}(vu)\geqslant 0$ và kết hợp với bài trên ta được $\max(0, \operatorname{rank} u+\operatorname{rank} v-n)\leqslant\operatorname{rank}(vu)\leqslant\min(\operatorname{rank} u, \operatorname{rank} v)$.

166. a) Giả sử $F = \operatorname{Ker} v$, $E = F \oplus G$. Lập ánh xạ w' : $\operatorname{Im} v \to E$ như sau. Với $y \in \operatorname{Im} v$ tồn tại $x \in E$ để $v(x) = y$. Phần tử x phân tích được một cách duy nhất thành

$$x = x_1 + x_2, \ x_1 \in F, \ x_2 \in G.$$

Phần tử $x_2 \in G$ xác định duy nhất bởi y, vì nếu c $x' \in E$ để $v(x') = y$ và $x' = x'_1 + x'_2$ thì $v(x) = v(x') = v(x_2) = v(x'_2)$, do đó $x_2 - x'_2 \in F \cap G = \{0\}$. Th thì ta đặt $w'(y) = x_2$. Rõ ràng w' là một ánh xạ tuyế tính. Giả sử w là một ánh xạ tuyến tính từ E tới E m cái thu hẹp của w trên $\operatorname{Im} v$ trùng với w'. Thế thì $wv = v$

b) Ta thu được định lý ba đường vuông góc.

167. a) $Z \subset W$ là hiển hiên. Giả sử $x \in W = \operatorname{Ker}\varphi^{i+}$ Thế thì $\varphi^i(\varphi(x)) = \varphi^{i+1}(x) = 0$, do đó $\varphi(x) \in \operatorname{Ker}\varphi^i = Z$

b) Theo câu trên $\varphi(Z) \subset Y$, do đó $S \subset Y$. Giả sử c $\alpha_j, \beta_k \in P$ không đồng thời bằng 0, sao cho

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_r u_r + \beta_1 \varphi(w_1) + \ldots + \beta_t \varphi(w_t) = 0.$$

Vì $u_1, \ldots, u_r$ độc lập tuyến tính nên ít nhất có mộ $\beta_k \neq 0$. Ta có

$\beta_1 \varphi(w_1) + \ldots + \beta_t \varphi(w_t) = -\alpha_1 u_1 - \ldots - \alpha_r u_r \in X = \operatorname{Ker}\varphi^{i-2}$. Vậy

$$\varphi^{i-2}(\beta_1 \varphi(w_1) + \ldots + \beta_t \varphi(w_t)) = 0, \text{ hay}$$
$$\varphi^{i-1}(\beta_1 w_1 + \ldots + \beta_t w_t) = 0,$$

do đó $y = \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_t w_t \in \operatorname{Ker}\varphi^{i-1} = Y$. Nhưng lú đó y biểu thị tuyến tính được qua cơ sở $\{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v$ của Y, và ta thu được một hệ thức giữa u_i, v_j, w_k mà c ít nhất một $\beta_k \neq 0$, trái giả thiết hệ

$$\{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_t\}$$

độc lập tuyến tính.

168. a) Vì $1, x, \ldots, x^n$ là một cơ sở của V_{n+1} nên tồn tạ duy nhất một phép biến đổi tuyến tính ψ của V_{n+1} sa cho $\psi(x^k) = u_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Để chứng minh ψ là một tự đẳng cấu chỉ cần chứng tỏ rằng $u_0(x), \ldots, u_k(x)$ là một cơ sở của V_{n+1}.

Điều này có thể suy từ bài tập 112 hoặc chứng minh trực tiếp rằng $u_0, \ldots, u_k$ là một tập độc lập tuyến tính.

b) Rõ ràng φ là một ánh xạ tuyến tính. Với $g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k u_k(x)$, ta có

$$\varphi(g) = \sum_{k=0}^{n} b_k \varphi(u_k) = \sum_{k=1}^{n} k b_k u_{k-1}. \quad (1)$$

Vì các đa thức u_k, $k = 0, \ldots, n$ độc lập tuyến tính, nên $\varphi(g) = 0$ khi và chỉ khi $kb_k = 0$ tức là $b_k = 0$ với mọi $k = 1, 2, \ldots, n$. Vậy Kerφ là tập các đa thức bậc không. Biểu thức (1) chứng tỏ Imφ là không gian con của V_{n+1} gồm các đa thức bậc $\leqslant n-1$.

c) Ta xét xem ánh xạ tuyến tính d biến cơ sở $1, x, \ldots, x^n$ của V_{n+1} thành hệ vectơ nào. Ta có

$$x^k \overset{\psi}{\longmapsto} u_k \overset{\varphi}{\longmapsto} k u_{k-1} \overset{\psi^{-1}}{\longmapsto} k x^{k-1}.$$

Vậy d biến x^k thành đạo hàm kx^{k-1} của nó. Vì phép lấy đạo hàm cũng là một phép biến đổi tuyến tính của không gian V_{n+1} nên d biến mỗi đa thức $f(x)$ thành đạo hàm $f'(x)$.

169. a) Trước hết $\varphi(f) = ff' - f'f = 0$. Nếu $g(x) \in V_{r+1}$ thì $g = af + g_1$, trong đó a là một số phức nào đó còn $g_1 \in V_r$. Vì vậy $\varphi(g) = a\varphi(f) + \varphi(g_1) = \varphi(g_1)$. Từ đó ta có $\varphi(V_{r+1}) = \varphi(V_r)$.

Nếu hạng tử cao nhất của f là bx^r và hạng tử cao nhất của g là cx^k thì hạng tử cao nhất của $\varphi(g)$ là $bc(k-r)x^{r+k-1}$.

hạng tử này khác không khi $k - r \neq 0$. Do đó nếu $k \neq r$ thì $\varphi(g) \neq 0$. Nếu $k = r$ thì theo trên ta có $\varphi(g) = \varphi(g_1)$ và $\varphi(g) \neq 0$ nếu $g_1 \neq 0$ (vì bậc của g_1 khác r). Vậy $g \in \operatorname{Ker}\varphi$ khi và chỉ khi $g = af$, với a là một số phức khác không tùy ý.

b) Ta có $\operatorname{rank}\overline{\varphi} = n + 1 - \dim \operatorname{Ker}\overline{\varphi}$.

$$\operatorname{Ker}\overline{\varphi} = \{0\} \text{ nếu } n < r \text{ và}$$

$$\operatorname{Ker}\overline{\varphi} = \{\lambda f \mid \lambda \text{ là một số tùy ý}\} \text{ nếu } n \geqslant r.$$

Trong trường hợp sau ta có $\dim \operatorname{Ker}\overline{\varphi} = 1$. Vậy

$$\operatorname{rank}\overline{\varphi} = \begin{cases} n + 1 & \text{nếu } n \leqslant r - 1, \\ n & \text{nếu } n \geqslant r. \end{cases}$$

c) Với mọi đa thức $g \in F_{p+1}$ tồn tại đa thức $h \in V$ để $\varphi(h) = g$. Ta có thể chọn h có bậc $\neq r$, vì nếu $g \in \varphi(V_{r+1})$ thì nó cũng thuộc $\varphi(V_r)$. Với h đã chọn như vậy ta có

$$\text{bậc } g = \text{bậc } \varphi(h) = \text{bậc } h + r - 1,$$

$$\text{bậc } g \leqslant p \text{ khi và chỉ khi bậc } h \leqslant p - r + 1.$$

Do đó $F_{p+1} = \varphi(V_{p-r+2})$. Xét hai khả năng:

1) Nếu $p - r + 1 < 0$, tức là $p < r - 1$ thì không tồn tại h nào thỏa mãn điều kiện cuối, do đó $F_{p+1} = \{0\}$ và $\dim F_{p+1} = 0$.

2) Nếu $p - r + 1 \geqslant 0$ thì $\dim F_{p+1} = \dim \varphi(V_{p-r+2}) = \operatorname{rank}(\varphi \mid V_{p-r+2})$. Vì vậy theo câu b) ta có nếu $0 \leqslant p - r + 1 \leqslant r - 1$, tức là $r - 1 \leqslant p \leqslant 2(r - 1)$ thì $\dim F_{p+1} = p - r + 2$, còn nếu $p - r + 1 \geqslant r$, tức là

$$p \geqslant 2r - 1 \text{ thì } \dim F_{p+1} = p - r + 1.$$

170. a) $(\varepsilon - f)(x) = x - f(x) = x - y = z$.

b) Trước hết ta chứng tỏ rằng phép biến đổi tuyến tính f của không gian V là một phép chiếu khi và chỉ khi

$f^2 = f$. Thật vậy, nếu f là một phép chiếu thì rõ ràng $f^2 = f$. Đảo lại, giả sử $f^2 = f$. Ta chứng minh f là một phép chiếu lên $\operatorname{Im} f$ song song với $\operatorname{Ker} f$. Với mọi $x \in \operatorname{Im} f$ tồn tại $y \in V$ sao cho $f(y) = x$. Lúc đó $f(x) = f^2(y) = f(y) = x$; Vì vậy nếu $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$ thì $x = f(x) = 0$, do đó $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = 0$. Mặt khác với $y \in V$ giả sử $f(y) = x$ thì $f(y - x) = f(y) - f(x) = x - x = 0$, do đó $y - x \in \operatorname{Ker} f$. Vậy $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = V$ và V là tổng trực tiếp của $\operatorname{Ker} f$ và $\operatorname{Im} f$, đồng thời f là phép chiếu lên $\operatorname{Im} f$ song song với $\operatorname{Ker} f$. Từ đó ta có

$$(f_1 + f_2)^2 = f_1^2 + f_1f_2 + f_2f_1 + f_2^2 =$$
$$= f_1 + f_1f_2 + f_2f_1 + f_2 = f_1 + f_2$$

khi và chỉ khi $f_1f_2 + f_2f_1 = \omega$. (*)
Nhân đẳng thức (*) bên phải với f_1 ta được:

$$f_1f_2f_1 + f_2f_1 = \omega, \text{ hay}$$
$$(f_1 + \varepsilon)(f_2f_1) = \omega.$$

Vì f_1 là một phép chiếu của không gian V trên trường số thực nên $f_1 + \varepsilon$ là một đơn cấu, do đó từ đẳng cấu cuối ta suy ra $f_2f_1 = \omega$. Tương tự, nhân đẳng thức (*) bên trái với f_1 ta cũng suy ra được $f_1f_2 = \omega$.

Đảo lại, nếu $f_1f_2 = f_2f_1 = \omega$ thì ta có đẳng thức (*) và do đó $f_1 + f_2$ là một phép chiếu.

c) $(f_1 - f_2)^2 = f_1^2 - f_1f_2 - f_2f_1 + f_2^2 =$
$$= f_1 + f_2 - f_1f_2 - f_2f_1.$$

Do đó $(f_1 - f_2)^2 = f_1 - f_2$ khi và chỉ khi

$$2f_2 - f_1f_2 - f_2f_1 = \omega.$$

Từ đó ta có:

$$f_2(\varepsilon - f_1) + (\varepsilon - f_1)f_2 = \omega. \text{ (**)}$$

Theo câu a) ta có $\varepsilon - f_1$ là một phép chiếu, và theo câu b) đẳng thức (**) xảy ra khi và chỉ khi

$$f_2(\varepsilon - f_1) = (\varepsilon - f_1)f_2 = \omega,$$

hay $f_2 = f_2 f_1 = f_1 f_2$.

d) Nếu $f_1 f_2 = f_2 f_1$ thì

$$(f_1 f_2)^2 = f_1 f_2 f_1 f_2 = f_1^2 f_2^2 = f_1 f_2.$$

Vậy $f_1 f_2$ là một phép chiếu.

Ví dụ sau đây chứng tỏ (3) không phải là điều kiện ắt có để $h = f_1 f_2$ là một phép chiếu. Giả sử $V = \mathbb{R}^2$ là không gian các cặp số thực, $f_1 : V \to V$ là ánh xạ xác định bởi $f_1(a, b) = (a, 0)$, còn $f_2 : V \to V$ là ánh xạ xác định bởi $f_2(a, b) = (a, a)$. Thế thì f_1 và f_2 là các phép chiếu, $f_1 f_2 = f_1 \neq f_2 = f_2 f_1$, tuy nhiên $f_1 f_2$ là một phép chiếu, vì $f_1 f_2 = f_1$.

171. b) Theo câu a) $BA = AB$ khi và chỉ khi $y = k\beta$, $z = k\gamma$, $x - t = k(\alpha - \delta)$. Do đó B có dạng

$$B = \begin{bmatrix} t + k(\alpha - \delta) & k\beta \\ k\gamma & t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} \alpha - \delta & \beta \\ \gamma & 0 \end{bmatrix}.$$

Hai ma trận $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ và $J = \begin{bmatrix} \alpha - \delta & \beta \\ \gamma & 0 \end{bmatrix}$ độc lập tuyến tính, do đó tập các ma trận B giao hoán với A lập thành không gian vectơ có số chiều bằng 2.

172. a) Ta có $T_{ij}^{-1}(a) = T_{ij}(-a)$,

$$T_{ij}(a)\,T_{jk}(b) = I + bI_{jk} + aI_{ij} + abI_{ik}.$$

Từ đó suy ra $T_{ij}^{-1}(a)\,T_{jk}^{-1}(b)\,T_{ij}(a)\,T_{jk}(b) = T_{ik}(ab)$, nếu i, j, k khác nhau.

b) Dùng phép biến đổi sơ cấp (a) trong bài tập 173. Nhân ma trận $A = (a_{ij})$ bên trái với $T_{ij}(a)$ có nghĩa là

cộng vào dòng thứ i của A dòng thứ j đã nhân với a. Tương tự, nhân bên phải A với $T_{ij}(a)$ có nghĩa là cộng vào cột thứ j của A cột thứ i đã nhân với a. Bằng các phép biến đổi sơ cấp trên các cột có thể làm cho $a_{12} \neq 0$. Sau đó nhân bên phải với $T_{21}\left(\frac{1 - a_{11}}{a_{12}}\right)$ ta thu được 1 tại vị trí (1, 1) rồi dùng các phép biến đổi sơ cấp để biến các phần tử còn lại của cột 1 và dòng 1 thành 0 cả. Tiếp tục quá trình đó vào ô cấp $n - 1$ còn lại, cuối cùng ta sẽ đi tới ma trận dạng $D_n(b)$. Vậy

$A = C_1 \ldots C_r D_n(b) C_{r+1} \ldots C_s$, $C_k = T_{ij}$ với i, j nào đó.

173. Phép biến đổi (a) thu được bằng cách nhân bên trái (phải) với $T_{ij}(a)$. Phép biến đổi (b) thu được bằng cách nhân bên trái (phải) với $D_i(b)$. Cuối cùng phép đổi chỗ hai dòng (cột) thu được bằng cách thực hiện một số phép biến đổi thuộc hai loại trên, chẳng hạn phép đổi chỗ dòng i cho dòng j thu được như sau:

$$\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} i + j \\ j \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} i + j \\ -i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} i + j \\ i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix}.$$

174. a) Giả sử $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$. Thế thì vết $AB = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$, vết $BA = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij}$. Vậy vết $AB =$ vết BA.

b) Từ a) suy ra vết $(AB - BA) = 0 \neq$ vết I.

175. Nếu A không suy biến thì theo bài tập **172**, **173** các phép biến đổi sơ cấp cũng biến A thành một ma trận không suy biến, do đó bằng các phép biến đổi sơ cấp chỉ trên các dòng có thể đưa A về dạng tam giác mà trên đường chéo bằng 1 cả. Sau đó lại dùng các phép biến đổi sơ cấp trên các dòng để đưa nó về ma trận đơn vị I. Giả

sử ta đã dùng các phép biến đổi sơ cấp $C_1, ..., C_k$ trong đó C_s, $s = 1, ..., k$ là các ma trận $T_{ij}(a)$ hay $D_i(b)$, để đưa A về ma trận I:

$$C_k \dots C_2 C_1 A = I.$$

Thế thì $A^{-1} = C_k \dots C_2 C_1 I$.

176. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$.

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 7/4 & 25/4 & -15/5 & 71/4 \\ -5/4 & -19/4 & 11/4 & -55/4 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & -1 \\ 1/4 & 5/4 & -3/4 & 13/4 \end{bmatrix}.$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

177. a) Giả sử $A = [a_{ij}]$, $B = [x_{ij}]$. Thế thì $AB =$ khi và chỉ khi:

$$A \cdot \begin{bmatrix} x_{ij} \\ x_{nj} \end{bmatrix} = 0 \cdot (1) \text{ với mọi } j = 1, 2, ..., n.$$

Hệ phương trình thuần nhất (1) có nghiệm khác kh khi và chỉ khi $| A | = 0$.

b) Lấy $B = E_{ij}$ là ma trận mà tại giao điểm của d i cột j là 1 còn những chỗ khác bằng 0. Thế thì đẳng i $AE_{ij} = E_{ij} A$ kéo theo $a_{ij} = 0$, $i \neq j$ và $a_{ii} = a_{jj}$.

178. b) Giả sử đã chọn cơ sở $e_1, \ldots, e_n \in E$ và $e'_1, \ldots, e'_m \in F$, và $f(e_i) = \Sigma a_{ji} e'_j$. Thế thì $A = [a_{ij}]$ là ma trận của f đối với các cơ sở $\{e_i\}$ và cơ sở $\{e'_i\}$ của E và F. Ta có.

$$\text{rank } f = \text{rank } \{f(e_1), \ldots, f(e_n)\} = \text{rank } A = r_A$$

c) Dùng câu b) và bài tập **164**, bằng cách nhận xét là nếu đối với một cặp cơ sở u có ma trận là A, v có ma trận là B thì $u + v$ có ma trận là $A + B$.

d) Dùng câu c).

179. a) Dùng bài **160** và bài **161**.

b) Nếu $r_A = r$ thì lấy B gồm r cột độc lập tuyến tính tùy ý của A và C là ma trận mà các cột là các hệ số trong việc biểu thị tuyến tính các cột của A qua các cột của B. Thế thì $A = BC$.

Đảo lại, giả sử $A = BC$, $r_B = r_C = r$, B cỡ $m \times r$ và C cỡ $r \times n$. Thế thì $r_A \leqslant r$. Mặt khác B chứa một định thức con $\neq 0$ cấp r, chẳng hạn đó là $B\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_r \\ 1 & 2 & \ldots & r \end{pmatrix}$ và C chứa một định thức con cấp r, chẳng hạn $C\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & r \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_r \end{pmatrix}$. Thế thì định thức con cấp r của A là $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_r \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_r \end{pmatrix} \neq 0$, nên $r_A = r$.

c) Dùng bài tập **173** để đưa A về ma trận tam giác R mà r phần tử đầu của đường chéo chính bằng 1, còn những phần tử dưới đường chéo chính và những phần tử của $n - r$ dòng cuối bằng 0.

180. a) Dùng bài **161** và bài **162** ta được $r_A + r_B - n \leqslant 0$. Có thể chứng minh trực tiếp: $AB = 0$ thì B là ma trận các nghiệm của hệ phương trình $AX = 0$. Do đó nếu $r_A = r$ thì $r_B \leqslant n - r =$ số chiều của không gian nghiệm. Vậy $r_A + r_B \leqslant n$. Với k bất kỳ mà $r_A \leqslant k \leqslant n$ bao giờ cũng chọn được nghiệm lập nên B để $r_B = k - r$.

b) Ta có $(I + A)(I - A) = I^2 - A^2 = I - I = 0$. Do đó theo câu a) ta có $r_{I+A} + r_{I-A} \leqslant n$. Mặt khác $(I + A) +$

$+ (I - A) = 2I$, nên $n = r_{2I} \leqslant r_{I+A} + r_{I-A}$. Vậy $r_{I+A} + r_{I-A} = n$.

131. a) $\det \widehat{A} = (\det A)^{n-1}$. Do đó nếu $r_A = n$ thì $r_{\widehat{A}} = n$. Nếu $\det A = 0$ thì mọi dòng của $\widehat{A}$ đều tỷ lệ, do đó nếu $r_A \leqslant n - 1$ thì $r_{\widehat{A}} \leqslant 1$. Nếu $r_A = n - 1$ thì $r_{\widehat{A}} = 1$, còn nếu $0 \leqslant r_A \leqslant n - 2$ thì $r_{\widehat{A}} = 0$.

b) Vì $\sum_j a_{ij} A_{kj} = \begin{cases} 0 \text{ nếu } i \neq k \\ |A| \text{ nếu } i = k \end{cases}$ nên $A\widehat{A} = \widehat{A}A = |A| I$.

Từ đó $\widehat{A} = |A| A^{-1}$, $\widehat{A}^{-1} = |A|^{-1} A$ và

$$(\widehat{\widehat{A}}) = |\widehat{A}| \widehat{A}^{-1} = |\widehat{A}| . |A|^{-1} . A.$$

Vì $|\widehat{A}| = |A|^{n-1}$ nên nếu $n > 2$ thì $(\widehat{\widehat{A}}) = |A|^{n-2} A$, còn nếu $n = 2$ thì $(\widehat{\widehat{A}}) = A$.

132. a) Theo bài **173**, phép biến đổi sơ cấp trên A có thể thu được bằng cách nhân bên trái hoặc bên phải A với các ma trận không suy biến. Do đó ta thu được một ma trận tương đương với A.

b) Nếu $B = PAQ$, $|P| \neq 0$, $|Q| \neq 0$ thì $r_B = r_A$ (dùng bài tập **179**). Đảo lại, mỗi ma trận A mà $r_A = r$ có thể bằng các phép biến đổi sơ cấp đưa về ma trận cùng cỡ như A mà trên đường chéo chính có r số 1 còn các chỗ khác bằng 0. Do đó nếu $r_A = r_B = r$ và A, B cùng cỡ th $A = PRQ$, $B = P' R Q'$.

Vì vậy $B = P' P^{-1} AQ^{-1} Q' = Q_1 AQ_1$.

133. a) Giả sử $A = [a_{ij}]$. Đặt $b_{ij} = \dfrac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$, $c_{ij} = \dfrac{a_{ij} - a_{ji}}{2}$. Thế thì $B = [b_{ij}]$ là một ma trận đối xứng $C = [c_{ij}]$ là một ma trận phản đối xứng và $A = B + C$

Giả sử có $A = D + E$, D đối xứng, E phản đối xứng và $D = [d_{ij}]$, $E = [e_{ij}]$ thì

$$d_{ij} + e_{ij} = a_{ij} \text{ và } d_{ji} + e_{ji} = a_{ji}.$$

Do đó

$$2d_{ij} = a_{ij} + a_{ji},\ 2e_{ij} = a_{ij} - a_{ji}.$$

Vậy $D = B$ và $E = C$.

b) *Cách thứ nhất.* Giả sử $A = [a_{ij}]$ là một ma trận đối xứng hoặc phản đối xứng. Ta chứng minh rằng nếu tồn tại định thức con chính M_r cấp r khác không và mọi định thức con chính cấp $r+1$ và cấp $r+2$ bao quanh nó đều bằng không thì $r_A = r$.

1) Khi $r = 0$ mọi định thức con chính cấp 1 và 2 đều bằng 0. Do đó $a_{ii} = 0$, $i = 1, \ldots, n$ và

$$\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} = a_{ii} a_{jj} \pm a_{ij}^2 = \pm a_{ij}^2 = 0,$$

nghĩa là $a_{ij} = 0$, hay $A = 0$. Vậy $r_A = 0$.

2) Khi $r = n - 1$ thì $M_{n-1} \neq 0$ $M_n = |A| = 0$. Vậy $r_A = n - 1$.

3) Giả sử $0 < r \leqslant n - 2$ và $M_r \neq 0$. Ta có thể giả thiết rằng M_r nằm ở góc trên bên trái và chứng tỏ rằng mọi định thức con cấp $r + 1$ bao quanh M_r đều bằng không. Giả sử M_{ij} là định thức con cấp $r + 1$ thu được từ M_r bằng cách ghép thêm dòng i, cột j $(i, j > r)$.

Nếu $i = j$ thì $M_{ij} = 0$ theo giả thiết.

Giả sử $i \neq j$ và C là ma trận thu được từ M_r bằng cách ghép thêm dòng i, dòng j, và cột i, cột j. Theo giả thiết $|C| = 0$. Nếu $M_{ij} \neq 0$ thì $r_C = r + 1$ và các dòng thứ $1, 2, \ldots, r, i$ của C độc lập tuyến tính. Do tính đối xứng, các cột với các chỉ số đó cũng độc lập tuyến tính. Nhưng nếu vậy thì $M_{ii} = 0$ trái giả thiết. Vậy $M_{ij} = 0$, và $r_A = r$.

Cách thứ hai. Giả sử $A = [a_{ij}]$ là một ma trận vuông cấp n tùy ý và $r_A = r$. Thế thì trong A tồn tại r dòng độc lập tuyến tính tối đại $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ và r cột độc lập tuyến tính tối đại $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_r}$. Ta chứng minh rằng các phần tử nằm tại giao điểm của các dòng và cột đó lập thành một ma trận vuông cấp r có định thức khác không.

Xét ma trận B gồm các dòng $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ của ma trận A. Rõ ràng $r_B = r$. Vì các cột β_j, $j \neq j_k$, $k = 1, \dots, r$ của ma trận A đều biểu thị tuyến tính được qua các cột β_{j_k}, nên có thể dùng các phép biến đổi sơ cấp trên các cột của ma trận A để biến đổi các cột β_j, $j \neq j_k$ thành không cả. Các phép biến đổi sơ cấp đó cảm sinh các phép biến đổi sơ cấp trên các cột của ma trận B, do đó không thay đổi hạng của B. Nhưng sau các phép biến đổi sơ cấp đó ma trận B trở thành một ma trận B_1 gồm các phần tử nằm tại giao điểm của các dòng $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ và các cột $\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_r}$ của ma trận A, còn các chỗ khác bằng không cả.

Vì $r_{B_1} = r_B = r$ nên ta có kết luận phải chứng minh.

Bây giờ nếu $A = [a_{ij}]$ là một ma trận đối xứng hoặc phản đối xứng, và nếu các dòng $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ độc lập tuyến tính tối đại (tức là $r_A = r$) thì các cột với chỉ số tương ứng $\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_r}$ trùng với các dòng $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ hoặc trái dấu, nên cũng độc lập tuyến tính. Do đó theo điều vừa chứng minh trên, ma trận cấp r gồm các phần tử nằm trên giao điểm của các dòng và các cột cùng chỉ số đó có định thức $\neq 0$ là một định thức con chính cấp r của ma trận A.

Vậy nếu $r_A = r$ thì trong A tồn tại một định thức con chính khác không cấp r, do đó rank A = cấp cao nhất của các định thức con chính khác không của A.

c) Vì trong một ma trận phản đối xứng mọi định thức con chính cấp lẻ đều bằng không, do đó r_A là chẵn.

184. a) A đối xứng khi và chỉ khi $A = A'$, trong đó A' là ma trận chuyển vị của A. Ta có $(AB)' = B'A' = BA$. Do đó $(AB)' = AB$ khi và chỉ khi $AB = BA$.

b) $C' = A'B'A' ... B'A' = ABA ... BA = C$.

c) $AA^{-1} = I$ do đó $(A^{-1})'A' = I = (A^{-1})'A$. Vậy $(A^{-1})' = A^{-1}$.

185. A phản đối xứng khi và chỉ khi $A' = -A$. Chứng minh tương tự bài trên.

186. a) và b) suy ra từ điều kiện $AA' = A'A = I$.

c) $AA' = I$ khi và chỉ khi $A' = A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widehat{A}$, trong đó $\widehat{A}$ là chuyển vị của ma trận gồm các phần bù đại số của các phần tử của ma trận A.

d) $|\widehat{A}| = |A|^{n-1} = |A|$ theo giả thiết, nên

$$|A|(|A|^{n-2} - 1) = 0.$$

vì $|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2$ mà $A \neq 0$ nên $|A| \neq 0$, do đó $|A|^{n-2} = 1$, hay $|A| = 1$. Theo câu c) ta có A trực giao.

e) Tương tự câu d).

187. Tương tự bài trên.

188. Suy ra từ các đẳng thức $AA' = I$ và $A\overline{A}' = I$.

189. Giả sử A là một ma trận đối xứng và trực giao. Thế thì $A = A'$ và $AA' = I$. Do đó ta có $A^2 = I$.

Các mệnh đề còn lại cũng chứng minh tương tự.

190. Ta có

$$B^2 = (2A - I)^2 = 4A^2 - 4A + I = I.$$

Điều ngược lại chứng minh tương tự.

191. Ký hiệu $T = [t_{ij}]$, $A = aI_{ij} = (a)_{ij}$, $B = bI_{kl} = (b)_{kl}$

$$C = cI_{rs} = (c)_{rs}.$$

a) $A \circ B = (at_{kj}b)_{il}$. $B \circ C = (bt_{rl}c)_{ks}$.

$(A \circ B) \circ C = (at_{kj}bt_{rl}c)_{is}$, $A \circ (B \circ C) = (at_{kj}bt_{rl}c)_{is}$.

b) Ta phải giải các phương trình sau đây đối với b:

$$at_{kj}\,bt_{il}\,a = a$$

$$bt_{il}\,at_{kj}\,b = b.$$

Nếu t_{kj} và $t_{il} \neq 0$ thì ta chỉ cần chọn $b = 0$ nếu $a = 0$ và

$$b = a^{-1}\,t_{kj}^{-1}\,t_{il}^{-1} \text{ nếu } a \neq 0.$$

c) Vì $A \circ B = (at_{kj}b)_{il}$ nên nếu $t_{kj} \neq 0$ với mọi k, j

thì $at_{kj}b \neq 0$ nếu $a \neq 0$, $b \neq 0$.

192. b) $\varphi^2(L) = \varphi(\varphi(L)) \subset \varphi(L) \subset L$. Tương tự $\varphi^k(L) \subset L$ do đó $f(\varphi)\,(L) \subset L$ với mọi đa thức $f(t)$.

c) $\varphi(L) \subset L$ mà φ không suy biến nên $\varphi(L) = L$.

Do đó $$\varphi^{-1}(L) = \varphi^{-1}(\varphi(L)) = L.$$

194. a) Giả sử

$$a\alpha + a_1\varphi(\alpha) + a_2\varphi^2(\alpha) + \ldots + a_{k-1}\varphi^{k-1}(\alpha) = 0 \qquad (1)$$

áp dụng φ^{k-1} vào đẳng thức này và từ $\varphi^k(\alpha) = 0$ ta được $a\varphi^{k-1}(\alpha) = 0$. Vì $\varphi^{k-1}(\alpha) \neq 0$ nên $a = 0$. Lại áp dụng φ^{k-2} vào (1) ta được $a_1 = 0$. Tiếp tục như vậy ta được tập S độc lập tuyến tính. Với $\beta \in W$ ta có

$$\beta = b\alpha + b_1\varphi(\alpha) + \ldots + b_{k-1}\varphi^{k-1}(\alpha).$$

do đó từ $\varphi^k(\alpha) = 0$ suy ra

$$\varphi(\beta) = b\varphi(\alpha) + b_1\varphi^2(\alpha) + \ldots + b_{k-2}\varphi^{k-1}(\alpha) \in W.$$

b) Vì $\varphi^k(\alpha) = 0$ nên $\varphi^k(\varphi^i(\alpha)) = \varphi^{k-i}(\alpha) = 0$ với $i = 0, ..., k-1$ $\widehat{\varphi}^k$ biến mỗi phần tử sinh của W thành 0 nên $\widehat{\varphi}^k = 0$.

195. a) $\widehat{\varphi} = \varphi \mid L$ là phép biến đổi tuyến tính của không gian vectơ trên trường số phức nên có ít nhất một vectơ riêng α. Vậy $\widehat{\varphi}$ và do đó φ có một không gian con bất biến một chiều chứa trong L.

b) Suy từ a).

196. b) $L_k = \{f(x) \mid \text{bậc} f(x) \leqslant k\}$, $k = 0, 1, ..., n$.

c) Vì bậc $f'(x) <$ bậc $f(x)$, nên φ chỉ có những vectơ riêng là các đa thức bậc không, ứng với giá trị riêng $\lambda = 0$.

197. a) Các giá trị riêng của φ là $\lambda_1 = 4$ (bội hai) và $\lambda_2 = 2$. Các vectơ riêng tương ứng là $\alpha_1 = (1, -1, 1)$ và $\alpha_2 = (1, 1, 1)$.

b) Lấy cơ sở của $\mathbf{R}^3$ gồm hai vectơ riêng α_1, α_2 và một vectơ α_3 không biểu thị tuyến tính qua α_1, α_2, chẳng hạn $\alpha_3 = \varepsilon_3 = (0, 0, 1)$. Đối với cơ sở này ma trận của φ có dạng

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

c) Ta lấy cơ sở α_1, α_2, α_3 mà α_1, α_2 là hai vectơ riêng của φ, còn $\alpha_3 = a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\varepsilon_3$, trong đó $c \neq 0$ để α_1, α_2, α_3 độc lập tuyến tính. Ta có

$\varphi(\alpha_3) = (4a - 3c)\alpha_1 + 2(b - c)\alpha_2 + 4c\varepsilon_3 = a'\alpha_1 + b'\alpha_2 + c'\alpha_3$.

Từ đó $a' = -3c$, $b' = -2(b + c)$, $c' = 4$.

Ta muốn cho một trong hai số a', b' bằng 0 còn số kia bằng 1. Vì $c \neq 0$ nên $a' \neq 0$, $b' = 0$. Vậy $c = -\dfrac{1}{3}$,

$b = \frac{1}{3}$. Vậy đối với cơ sở $\alpha_1 = (1, -1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 1, 1)$, $\alpha_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$ (vì a tùy ý, ta lấy $a = 0$) thì ma trận của φ có dạng

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

198. a) Đa thức đặc trưng của φ là $|A - \lambda I| = f(\lambda)$, trong đó

$$f(\lambda) = (-\lambda)^n + c_1(-\lambda)^{n-1} + \dots + c_n.$$

Ta thấy hệ số c_k của $(-\lambda)^{n-k}$ là tổng của các định thức con của $|A - \lambda I|$ chứa k phần tử trên đường chéo chính với $\lambda = 0$. Đó là những định thức con chính cấp k của ma trận A.

b) Theo câu a) và theo định lý Viet, tổng các giá trị riêng của φ bằng c_1, còn tích các giá trị riêng bằng c_n.

c) Nếu $\varphi(\alpha_i) = \lambda_0\alpha_i$, $i = 1, \dots, k$ thì

$$\varphi\left(\sum_i a_i\alpha_i\right) = \lambda_0 \sum_i a_i\alpha_i.$$

199. a) Đặt $B = A - \lambda_0 I$. Thế thì

$$|B - \mu I| = |A - \lambda_0 I - \mu I| = |A - (\mu + \lambda_0)I|$$

Vậy nếu $|B - \mu I|$ có nghiệm μ_0 bội s thì $|A - \lambda I|$ có nghiệm $\mu_0 + \lambda_0$ bội s. Theo bài trên ta có

$$|B - \mu I| = (-\mu^n) + c_1(-\mu)^{n-1} + \dots + c_n,$$

trong đó c_k là tổng của các định thức con chính cấp k của ma trận B. Nếu rank $B = r$ thì $c_k = 0$ với mọi $k > r$, do đó $|B - \mu I|$ có nghiệm 0 bội $s \geqslant n - r$. Vậy theo điều

trên $|A - \lambda I|$ có nghiệm λ_o bội $\geqslant n - r$. Vậy $n - r \leqslant s$. Mặt khác vì $|B| = |A - \lambda_o I| = 0$ nên rank $B = r < n$, do đó $n - r \geqslant 1$.

b) lấy

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_o & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 \end{bmatrix}$$

trong đó $a_{i,i+1} \neq 0$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n-1$. Thế thì

rank $B = \text{rank}(A - \lambda_o I) = n - 1$, do đó $d = 1$.

Nếu lấy A là ma trận sau đây

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_o & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_o & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

trong đó có s phần tử λ_o trên đường chéo chính, còn mọi phần tử khác bằng không, thì $B = A - \lambda_o I$ có hạng bằng $n - s$, do đó $d = s$.

c) $|A^{-1} - \lambda I| = (-\lambda)^n |A^{-1}| \cdot \left| A - \frac{1}{\lambda} I \right|$, do đó nếu A có nghiệm đặc trưng λ_o bội s thì A^{-1} có nghiệm đặc trưng λ_o^{-1} bội s.

d) Giả sử $|A - \lambda I| = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$. Ký hiệu $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{p} + i \sin \frac{2k\pi}{p}$ $(k = 0, 1, \dots, p - 1)$

và xét $|A - \lambda\varepsilon_k I| = (\lambda_1 - \lambda\varepsilon_k)(\lambda_2 - \lambda\varepsilon_k) \dots (\lambda_n - \lambda\varepsilon_k)$
Thế thì

$$\prod_{k=0}^{p-1} |A - \lambda\varepsilon_k I| = \prod_{k=0}^{p-1} (\lambda_1 - \lambda\varepsilon_k)(\lambda_2 - \lambda\varepsilon_k) \dots (\lambda_n - \lambda\varepsilon_k).$$

Từ đó ta có

$$|A^p - \lambda^p I| = (\lambda_1^p - \lambda^p)(\lambda_2^p - \lambda^p) \dots (\lambda_n^p - \lambda^p).$$

Thay trong đẳng thức cuối λ^p bởi λ ta được

$$|A^p - \lambda I| = (\lambda_1^p - \lambda)(\lambda_2^p - \lambda) \dots (\lambda_n^p - \lambda)$$

Vậy ma trận A^p có nghiệm đặc trưng λ_0^p bội s nếu ma trận A có nghiệm đặc trưng λ_0 bội s.

e) Suy từ câu d).

200. Chẳng hạn :

a)
$$T = \begin{bmatrix} 1/10 & -3/14 & -3/35 \\ 0 & -1/7 & 1/7 \\ 1/3 & 1/14 & 1/35 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix};$$

b)
$$T = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix};$$

c)
$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \dots & -1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

trong đó các phần tử của đường chéo phụ ở phía trên đường chéo chính bằng -1 còn ở dưới bằng 1. Nếu n lẻ

thì ở giao điểm của đường chéo chính và đường chéo phụ có thể lấy 1 hay -1.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & -1 \end{bmatrix}$$

trong đó đường chéo chính có $\frac{n}{2}$ số 1 nếu n chẵn và $\frac{n+1}{2}$ số 1 nếu n lẻ.

201. a) Giả sử đa thức đặc trưng của A là :

$f(\lambda) = |A - \lambda I|$. Xét ma trận B gồm các phần phụ đại số của $|A - \lambda I|$. Thế thì $B(A - \lambda I) = |A - \lambda I|\, I = f(\lambda) I$. Từ đó suy ra $f(A) = 0$ bằng cách xem B như một đa thức của λ bậc $\leqslant n-1$ với hệ tử là những ma trận vuông cấp n không phụ thuộc λ rồi thay B vào đẳng thức trên.

b) Suy từ câu a).

c) Giả sử $B = T^{-1}AT$ và $g(\lambda) = a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \dots + a_m$ mà $g(A) = 0$. Thế thì

$T^{-1}g(A)T = a_0(T^{-1}AT)^m + a_1(T^{-1}AT)^{m-1} + \dots + a_mI = 0$ hay $g(B) = 0$. Vậy đa thức tối tiểu của A chia hết cho đa thức tối tiểu của B. Tương tự, ta có điều ngược lại.

202. a) Giả sử $\alpha \in U$. Vì $g(t)t = tg(t)$ nên $g(\varphi)\varphi = \varphi g(\varphi)$. Do đó $[g(\varphi)\varphi](\alpha) = [\varphi g(\varphi)](\alpha) = \varphi(0) = 0$; nên $\varphi(\alpha) \in U$. Tương tự $W = \mathrm{Ker}\, h(\varphi)$ bất biến đối với φ.

b) Vì $g(t)$ và $h(t)$ nguyên tố cùng nhau nên tồn tại các đa thức $r(t)$ và $h(t)$ để

$r(t)\,g(t) + s(t)\,h(t) = 1$, do đó

(1) $r(\varphi)\,g(\varphi) + s(\varphi)\,h(\varphi) = \varepsilon$ là ánh xạ đồng nhất.

Với mỗi $\alpha \in V$ theo (1) ta có

$$\alpha = r(\varphi)\,g(\varphi)(\alpha) + s(\varphi)\,h(\varphi)(\alpha).$$

Hạng tử thứ nhất ở vế phải thuộc W vì $h(\varphi)\,r(\varphi)\,g(\varphi)(\alpha) = r(\varphi)\,g(\varphi)\,h(\varphi)(\alpha) = r(\varphi)\,f(\varphi) \times \times (\alpha) = 0$. Tương tự, hạng tử thứ hai thuộc U, do đó $V = U + W$. Để chứng minh $V = U \oplus W$ ta chứng minh $\alpha = \beta + \gamma$, $\beta \in U$, $\gamma \in W$ là duy nhất. Áp dụng phép biến đổi $r(\varphi)\,g(\varphi)$ vào α và dùng $g(\varphi)(\beta) = 0$ ta được $r(\varphi)\,g(\varphi)(\alpha) = r(\varphi)\,g(\varphi)(\beta) + r(\varphi)\,g(\varphi)(\gamma) = r(\varphi) \times \times g(\varphi)(\gamma)$. Mặt khác áp dụng (1) vào γ và dùng $h(\varphi) \times \times (\gamma) = 0$ ta được

$$\gamma = r(\varphi)\,g(\varphi)(\gamma) + s(\varphi)\,h(\varphi)(\gamma) = r(\varphi)\,g(\varphi)(\gamma),$$

nghĩa là γ xác định duy nhất bởi α. Tương tự β xác định duy nhất bởi α.

c) Giả sử $m_1(t)$ và $m_2(t)$ là các đa thức tối tiểu của $\varphi_1 = \varphi \mid U$ và $\varphi_2 = \varphi \mid W$ tương ứng. Vì $U = \operatorname{Ker} g(\varphi)$ và $W = \operatorname{Ker} h(\varphi)$ nên $g(\varphi_1) = h(\varphi_2) = 0$. Do đó $m_1(t)$ chia hết $g(t)$ và $m_2(t)$ chia hết $h(t)$.

Theo trên $f(t)$ là bội chung bé nhất của $m_1(t)$ và $m_2(t)$, nhưng hai đa thức này nguyên tố cùng nhau, nên $f(t) = m_1(t)\,m_2(t)$. Mặt khác $f(t) = g(t)\,h(t)$ và các đa thức này đều có hệ số cao nhất bằng 1, nên $g(t) = m_1(t)$, $h(t) = m_2(t)$.

203. a) Chứng minh bằng quy nạp theo r. Theo bài trên, ta có thể viết V là tổng trực tiếp của các không gian con φ — bất biến W_1 và V_1, trong đó $W_1 = \operatorname{Ker} f_1(\varphi)^{n_1}$

$V_1 = \text{Ker}\, f_2(\varphi)^{n_2} \ldots f_r(\varphi)^{n_r}$ và các đa thức tối tiểu của $\varphi_1 = \varphi \mid W_1, \varphi_1 = \varphi \mid V_1$ tương ứng là $f_1(t)^{n_1}$ và $f_2(t)^{n_2} \ldots f_r(t)^{n_r}$. Theo giả thiết quy nạp V_1 là tổng trực tiếp của $W_2, \ldots, W_r$, $W_i = \text{Ker}\, f_i(\varphi_1)^{n_i}$ và $f_i(t)^{n_i}$ là đa thức tối tiểu của $\varphi_1 \mid W_i$. Nhưng $\text{Ker} f_i(\varphi)^{n_i}$ phải chứa trong V_1 vì $f_i(t)^{n_i}$ chia hết $f_2(t)^{n_2} \ldots f_r(t)^{n_r}$. Vậy $\text{Ker} f_i(\varphi)^{n_i} = \text{Ker} f_i(\varphi_1)^{n_i} = W_i$. Hơn nữa $\varphi \mid W_i = \varphi_1 \mid W_i$ $(i = 2, \ldots, r)$, vì vậy $f_i(t)^{n_i}$ cũng là đa thức tối tiểu của $\varphi \mid W_i$. Vậy $V = W_1 \oplus \oplus \ldots \oplus W_r$.

b). Giả sử $m(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \ldots (t - \lambda_r)$ với các λ_i khác nhau. Theo câu a), V là tổng trực tiếp của các W_i, $W_i = \text{Ker}(\varphi - \lambda_i\varepsilon)$, $i = 1, \ldots, r$ và ε là ánh xạ đồng nhất. Vậy nếu $\alpha \in W_i$ thì $(\varphi - \lambda_i\varepsilon)(\alpha) = 0$ hoặc $\varphi(\alpha) = \lambda_i\alpha$, nghĩa là mỗi $\alpha \in W_i$ là một vectơ riêng ứng với giá trị riêng λ_i. Hợp các cơ sở của W_i ta được một cơ sở của V gồm các vectơ riêng của φ, do đó đối với cơ sở này ma trận của φ có dạng chéo. Đảo lại, giả sử φ có ma trận dạng chéo đối với một cơ sở nào đó, tức là φ có một cơ sở gồm toàn vectơ riêng của φ. Giả sử $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ là các giá trị riêng phân biệt của φ. Thế thì phép biến đổi

$$f(\varphi) = (\varphi - \lambda_1\varepsilon)(\varphi - \lambda_2\varepsilon) \ldots (\varphi - \lambda_r\varepsilon)$$

biến mỗi vectơ của cơ sở thành vectơ không, do đó $f(\varphi) = 0$. Vậy $f(t)$ chia hết cho đa thức tối tiểu $m(t)$ của φ, nghĩa là $m(t)$ là tích các nhân tử tuyến tính phân biệt.

204. a) $\beta \in Z(\alpha, \varphi)$ thì $\beta = f(\varphi)(\alpha)$ đối với một đa thức $f(t)$ nào đó. Do đó

$$\varphi(\beta) = [g(\varphi)](\alpha),$$

trong đó $g(t) = tf(t)$. Vậy $\varphi(\beta) \in Z(\alpha, \varphi)$.

b) Theo định nghĩa của số k, rõ ràng $m_\alpha(t)$ là đa thức nguyên thủy bậc bé nhất mà $[m_\alpha(\varphi)](\alpha) = 0$. Nếu $r_\alpha(t)$ cũng là một đa thức nguyên thủy bậc k mà $[r_\alpha(\varphi)](\alpha) = 0$ thì

$$[(m_\alpha - r_\alpha)(\varphi)](\alpha) = 0,$$

mà $(m_\alpha - r_\alpha)(t)$ có bậc nhỏ hơn k, do đó ta có $(m_\alpha - r_\alpha) \times$ $\times (t) = 0$. Vậy $m_\alpha(t) = r_\alpha(t)$.

c) Giả sử $m(t) = t^s + b_{s-1}t^{s-1} + \dots + b_s$ là đa thức tối tiểu của φ_α. Vì $\alpha \in Z(\alpha, \varphi)$ nên

$$0 = [m(\varphi_\alpha)](\alpha) = [m(\varphi)](\alpha) = \varphi^s(\alpha) + b_{s-1}\varphi^{s-1}(\alpha) + \\ + \dots + b_s\alpha.$$

Vậy $\varphi^s(\alpha)$ là tổ hợp tuyến tính của $\alpha, \dots, \varphi^{s-1}(\alpha)$. Do đó nếu $k = \dim Z(\alpha, \varphi) =$ bậc của $m_\alpha(t)$ thì $k \leqslant s$. Nhưng $m_\alpha(\varphi) = 0$, do đó $m_\alpha(\varphi_\alpha) = 0$, vì vậy $m(t)$ chia hết $m_\alpha(t)$. Như vậy ta có $k = s$ và $m_\alpha(t) = m(t)$.

d) Ta có

$$\varphi_\alpha(\alpha) = \varphi(\alpha),$$
$$\varphi_\alpha(\varphi(\alpha)) = \varphi^2(\alpha),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\varphi_\alpha(\varphi^{k-2}(\alpha)) = \varphi^{k-1}(\alpha),$$

$$\varphi_\alpha(\varphi^{k-1}(\alpha)) = \varphi^k(\alpha) = -a_0\alpha - a_1\varphi(\alpha) - \dots - a_{k-1}\varphi^{k-1}(\alpha),$$

do đó ma trận của φ_α đối với cơ sở $\{\alpha, \varphi(\alpha), \dots, \varphi^{k-1}(\alpha)\}$ là

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{k-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{k-1} \end{bmatrix}$$

205. a) Việc đổi chỗ dòng thứ i với dòng thứ j của ma trận A thu được bằng cách nhân bên trái A với ma trận P_{ij}, trong đó $P_{ij} = [p_{ij}]$, $p_{kk} = 1$ nếu $k \neq i, j$, $p_{ij} = p_{ji} = 1$, còn mọi phần tử khác của P_{ij} đều bằng không. Tương tự, việc đổi chỗ cột thứ i với cột thứ j của ma trận A thu được bằng cách nhân bên phải A với P_{ij}.

Dễ thấy rằng $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$, do đó nếu B thu được từ A bằng cách đổi chỗ dòng thứ i với dòng thứ j và đổi chỗ cột thứ i với cột thứ j thì

$$B = P_{ij} A P_{ij} = P_{ij}^{-1} A P_{ij},$$

nên B đồng dạng với A.

b) Ma trận A chỉ đồng dạng với chính nó khi và chỉ khi $AT = TA$ với mọi ma trận không suy biến T. Lấy $T = T_{ij}$, $i \neq j$, trong đó $T_{ij} = I + I_{ij}$, I là ma trận đơn vị, I_{ij} là ma trận mà ở giao điểm của dòng i cột j là 1 còn mọi chỗ khác bằng 0 (xem bài tập 172). Đẳng thức $AT_{ij} = T_{ij} A$ cho ta $a_{ii} = a_{jj}$ và $a_{ji} = 0$ (bằng cách so sánh phần tử nằm ở dòng i cột j ở hai vế, và phần tử nằm ở dòng i cột i ở hai vế). Vậy $A = aI$ là ma trận vô hướng.

206. Giả sử $A = A_0 \lambda^t + A_1 \lambda^{t-1} + \dots + A_t$. Nếu $t < s$ thì có thể lấy $Q_1 = Q_2 =$ ma trận không, còn $R_1 = R_2 = A$. Giả sử với mọi $t < k$ đều tồn tại các ma trận Q_1, R_1 và Q_2, R_2 thỏa mãn $A = BQ_1 + R_1 = Q_2 B + R_2$, trong đó bậc của các phần tử của R_1 và R_2 đối với λ bé hơn s. Ta chứng minh điều đó đúng với $t = k > s$. Lấy $Q' = B_0^{-1} A_0 \lambda^{k-s}$ và $Q'' = A_0 B^{-1} \lambda^{k-s}$. Thế thì $A - BQ' = C$ và $A - Q''B = C'$ là hai ma trận mà bậc của các phần tử đối với λ bé hơn k, do đó theo trên tồn tại Q_1, R_1 và Q_2, R_2 thỏa mãn $C = BQ_1 + R_1$ và $C' = Q_2 B + R_2$.

Từ đó suy ra $A = B(Q' + Q_1) + R_1 = (Q'' + Q_2)B + R_2$

Tính duy nhất là hiển nhiên.

207. a) Phép nhân một dòng (cột) của ma trận A với một phần tử $a \neq 0$ của trường K có thể thu được bằng cách nhân bên trái (phải) A với ma trận dạng

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & a & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

còn phép cộng vào một dòng (cột) của A một dòng (cột) khác của A đã nhân với một đa thức $f(\lambda)$ tùy ý thu được bằng cách nhân bên trái (phải) A với ma trận dạng

$$\begin{bmatrix} 1 & & \vdots & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & f(\lambda) & \cdots & \cdots \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & \vdots & & 1 \end{bmatrix}$$

(xem thêm bài 173).

b) Tính chất phản xạ và bắc cầu là hiển nhiên. Tính chất đối xứng suy ra từ chỗ, nếu từ $A(\lambda)$ sang $B(\lambda)$ ta dùng các phép biến đổi sơ cấp nào đó thì từ $B(\lambda)$ sang $A(\lambda)$ ta dùng các phép biến đổi sơ cấp ngược lại, cụ thể là nhân một dòng (cột) với a^{-1}, cộng vào một dòng (cột) một dòng (cột) khác đã nhân với $-f(\lambda)$.

c) Việc đổi chỗ hai dòng (cột) của A thu được bằng cách thực hiện liên tiếp một số phép biến đổi sơ cấp (xem thêm bài 173).

208. Chứng minh bằng quy nạp theo cấp n của λ — ma trận A. Nếu $n = 1$ thì $A(\lambda) = [a_{11}(\lambda)]$. Nếu $a_{11}(\lambda) = 0$ thì A đã có dạng chính tắc. Nếu $a_{11}(\lambda) \neq 0$ thì dùng phép biến đổi sơ cấp để chia cho hệ số cao nhất.

Giả sử đã chứng minh cho các λ — ma trận cấp $n - 1$. Xét ma trận $A(\lambda)$ cấp n. Nếu $A(\lambda)$ là ma trận không thì nó đã có dạng chính tắc. Giả sử $A(\lambda) \neq 0$.

Lựa chọn trong các ma trận tương đương với $A(\lambda)$ một ma trận có phần tử ở góc trên bên trái khác không và có bậc thấp nhất. Giả sử đó là $B(\lambda) = [b_{ij}(\lambda)]$. Lúc đó mọi phần tử của dòng thứ nhất và cột thứ nhất của $B(\lambda)$ đều chia hết cho $b_{11}(\lambda)$, do đó dùng các phép biến đổi sơ cấp có thể đưa $B(\lambda)$ về ma trận

$$C(\lambda) = \begin{bmatrix} b_{11}(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{22}(\lambda) & \dots & c_{2n}(\lambda) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & c_{n2}(\lambda) & \dots & c_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Theo giả thiết quy nạp, ma trận cấp $n - 1$ ở góc dưới bên phải của $C(\lambda)$ có thể đưa về dạng chính tắc. Để kết

$$\begin{bmatrix} c_2(\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_n(\lambda) \end{bmatrix}$$

thúc, chỉ còn phải chứng minh $c_2(\lambda)$ chia hết cho $b_{11}(\lambda)$. Nếu $c_2(\lambda) = b_{11}(\lambda)\,q(\lambda) + r(\lambda)$ với $r(\lambda) \neq 0$

thì dùng phép biến đổi sơ cấp để đưa $r(\lambda)$ lên vị trí ở góc trên bên trái, trái với giả thiết chọn $b_{11}(\lambda)$.

209. a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-3)^2 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f(\lambda) \end{bmatrix}$, trong đó $f(\lambda) = \lambda^5 + 5\lambda^4 + 4\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1$;

d) $\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & 0 \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & 1 & \\ & & & & & \lambda^n \end{bmatrix}$, trong đó n là cấp của ma trận đã cho.

210. a) Vì các phép biến đổi sơ cấp không làm thay đổi hạng của ma trận, nên nếu hạng $A = r$ thì hạng của ma trận chính tắc của A cũng bằng r. Do đó $E_k(\lambda) \neq 0$ với $k = 1, \ldots, r$ và $E_k(\lambda) = 0$ với $k > r$.

b) Trước hết ta chứng minh rằng các phép biến đổi sơ cấp không làm thay đổi các $D_k(\lambda)$. Giả sử $A_2(\lambda)$ thu được từ $A_1(\lambda)$ bằng một phép biến đổi sơ cấp, $D_{ki}(\lambda)$, $i = 1, 2$ là $D_k(\lambda)$ của $A_1(\lambda)$ và $A_2(\lambda)$ tương ứng. Ta chứng minh $D_{k1}(\lambda) = D_{k2}(\lambda)$.

1) Nếu $A_2(\lambda)$ thu được từ $A_1(\lambda)$ bằng một phép nhân một dòng (hay cột) với phần tử $\alpha \neq 0$ thì các định thức con cấp k của $A_1(\lambda)$ và $A_2(\lambda)$ chỉ khác nhau một nhân tử α không đổi hoặc bằng nhau, do đó $D_{k1}(\lambda) = D_{k2}(\lambda)$.

2) Nếu $A_2(\lambda)$ thu được từ $A_1(\lambda)$ bằng phép cộng vào dòng thứ i của nó dòng thứ j đã nhân với $f(\lambda)$ thì có ba khả năng phân loại các định thức con cấp k. Loại thứ nhất gồm các định thức con cấp k không chứa phần tử của dòng thứ i. Trong cả hai ma trận các định thức này bằng nhau. Loại thứ hai gồm các định thức con cấp k chứa cả dòng thứ i và dòng thứ j. Trong cả hai ma trận các định

thức này cũng bằng nhau. Loại thứ ba gồm những định thức con cấp k chứa dòng thứ i nhưng không chứa dòng thứ j. Lúc đó chúng có dạng tương ứng là

$$M_1 = \begin{vmatrix} \cdots\cdots \\ a_{ip_1} \ldots a_{ip_k} \\ \cdots\cdots \end{vmatrix},$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{ip_1} + a_{jp_1} f(\lambda) \ldots a_{ip_k} + a_{jp_k} f(\lambda) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}.$$

Ta có $M_2 = M_1 + f(\lambda)N_1$, trong đó N_1 là một định thức con cấp k của $A_1(\lambda)$.

Vì mọi định thức con cấp k của $A_1(\lambda)$ đều chia hết cho $D_{k1}(\lambda)$ nên mọi định thức con cấp k của $A_2(\lambda)$ cũng chia hết cho $D_{k1}(\lambda)$, do đó $D_{k2}(\lambda)$ chia hết cho $D_{k1}(\lambda)$. Dùng phép biến đổi sơ cấp ngược từ $A_2(\lambda)$ tới $A_1(\lambda)$, ta được $D_{k1}(\lambda)$ lại chia hết cho $D_{k2}(\lambda)$. Vậy $D_{k1}(\lambda) = D_{k2}(\lambda)$.

Trong ma trận chính tắc ta có

$$D_k(\lambda) = E_1(\lambda)\ E_2(\lambda) \ldots\ E_k(\lambda),$$

do đó
$$E_k(\lambda) = \frac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)}.$$

211. A tương đương với B thì A và B có chung các nhân tử bất biến và do đó có chung ma trận chính tắc. Ngược lại nếu A và B có chung ma trận chính tắc thì vì mỗi ma trận chỉ tương đương với một ma trận chính tắc duy nhất nên A và B tương đương với nhau.

Giả sử A và B tương đương, thế thì B thu được từ A bằng cách áp dụng các phép biến đổi sơ cấp, tức là (theo bài tập 173) nhân bên trái và bên phải A với các ma trận không suy biến dạng đặc biệt, ta gọi là các ma trận sơ cấp, nghĩa là

$$B = U_1U_2 \ldots U_pAV_1V_2 \ldots V_q = PAQ,$$

trong đó $|P| \neq 0$, $|Q| \neq 0$ là các giá trị không đổi. Đảo lại, giả sử $B = PAQ$ với P, Q là những λ — ma trận vuông cấp n có định thức không đổi và khác không.

Trước hết ta chứng minh P và Q tương đương với ma trận đơn vị I. Ta có $D_n(\lambda)$ (xem bài **210**) của P bằng $|P|$ chia cho hệ số cao nhất của nó. Vì $|P| \neq 0$ và không đổi, nên $D_n(\lambda) = 1$. Do đó các nhân tử bất biến $E_k(\lambda) = 1$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Vậy P tương đương với I.

Tương tự Q tương đương với I. Vậy có thể chuyển từ I sang P và Q bằng một số phép biến đổi sơ cấp, hay nói cách khác là bằng cách nhân với một số ma trận sơ cấp :

$$P = P_1P_2 \ldots P_rIQ_1 \ldots Q_s,$$
$$Q = R_1R_2 \ldots R_tIS_1 \ldots S_q.$$

Do đó $B = PAQ = P_1 \ldots P_rQ_1 \ldots Q_sAR_1 \ldots R_tS_1 \ldots S_q$, nghĩa là B thu được từ A bằng cách áp dụng một số hữu hạn phép biến đổi sơ cấp, hay B tương đương với A.

212. a) $(\lambda - 1)^2$, $(\lambda + 1)^2$.

b) Không tồn tại ước sơ cấp.

c) Không tồn tại ước sơ cấp.

d) $(\lambda - a)^n$ nếu $b \neq 0$, và $\lambda - a, \lambda - a, \ldots, \lambda - a$, nếu $b = 0$.

213. Nếu A đồng dạng với B, $A = C^{-1}BC$ với $|C| \neq 0$ thì

$$A - \lambda I = C^{-1}BC - \lambda C^{-1}IC = C^{-1}(B - \lambda I)C,$$

do đó theo câu c) bài tập 7, $A - \lambda I$ tương đương với $B - \lambda I$.

Ngược lại, giả sử $A - \lambda I$ tương đương với $B - \lambda I$. Thế thì tồn tại các ma trận vuông $P(\lambda)$ và $Q(\lambda)$ mà $|P(\lambda)| \neq 0$, $|Q(\lambda)| \neq 0$ là những đại lượng không đổi sao cho

$$B - \lambda I = P(\lambda)(A - \lambda I)Q(\lambda). \qquad (1)$$

Ta chứng minh rằng có thể thay $P(\lambda)$ và $Q(\lambda)$ trong (1) bởi những ma trận không đổi. Thật vậy, chia bên trái $P(\lambda)$ và bên phải $Q(\lambda)$ cho $B - \lambda I$ ta được

$P(\lambda) = (B - \lambda I)\, P_1(\lambda) + P_o$, P_o là ma trận không đổi,
$Q(\lambda) = Q_1(\lambda)\,(B - \lambda I) + Q_o$, Q_o là ma trận không đổi.
Sau khi thay vào (1) ta suy ra

$$(B - \lambda I) - P_o(A - \lambda I)Q_o =$$
$$= (B - \lambda I)[P_1(\lambda)P^{-1}(\lambda) + Q^{-1}(\lambda)\, Q_1(\lambda) - P_1(\lambda) \times$$
$$\times (A - \lambda I)\, Q_1(\lambda)]\,(B - \lambda I).$$

Ta chứng minh biểu thức trong ngoặc vuông bằng không.

Trước hết vì $|P(\lambda)|$ và $|Q(\lambda)|$ không đổi và khác không nên $P^{-1}(\lambda)$ và $Q^{-1}(\lambda)$ là những λ — ma trận. Do đó biểu thức trong ngoặc vuông là một đa thức của λ với hệ tử là những ma trận không đổi.

Nếu biểu thức đó khác không và có bậc đối với λ là $k \geqslant 0$ thì vế phải của đẳng thức cuối có bậc $\geqslant 2$ đối với λ, trong khi vế trái có bậc $\leqslant 1$, mâu thuẫn. Vậy biểu thức trong ngoặc vuông đó phải bằng không, và

$$B - \lambda I = P_o(A - \lambda I)Q_o. \qquad (2)$$

Bây giờ so sánh hệ tử của λ ở hai vế của đẳng thức (2) ta được

$$P_oQ_o = I,$$

hay

$$P_o = Q_o^{-1}$$

Lại so sánh hệ tử tự do ở hai vế của (2) ta được

$$B = P_oAQ_o = Q_o^{-1}AQ_o$$

tức là A và B đồng dạng.

214. Nếu ma trận A đồng dạng với ma trận Jordan J thì các đa thức đặc trưng $|A - \lambda I|$ và $|J - \lambda I|$ có cùng

nghiệm. Nhưng các nghiệm của $|J - \lambda I|$ là các phần tử nằm trên đường chéo chính của J, do đó chúng thuộc trường cơ sở K.

Đảo lại, nếu $|A - \lambda I|$ có mọi nghiệm thuộc trường cơ sở K và giả sử các nhân tử bất biến khác 1 của ma trận $A - \lambda I$ là $E_n(\lambda), \ldots, E_{n-k}(\lambda)$ thì

$$|A - \lambda I| = (-1)^n E_n(\lambda) E_{n-1}(\lambda) \ldots E_{n-k}(\lambda)$$

phân tích được thành nhân tử tuyến tính, chẳng hạn

$$E_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_1} \ldots$$

$$E_{n-1}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_2} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \ldots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$E_{n-k}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_{k+1}} (\lambda - \lambda_2)^{m_{k+1}} \ldots,$$

trong đó các số $n_i, m_j \geq 0$, $n_i \geq n_{i+1}$, $m_j \geq m_{j+1}, \ldots$ Lập ma trận Joócđăng J như sau: ứng với nhân tử $(\lambda - \lambda_1)^{n_1}$ lập khối Joócđăng cấp n_1 thuộc phần tử λ_1 (xem bài tập 216), ứng với nhân tử $(\lambda - \lambda_2)^{m_1}$ lập khối Joócđăng cấp m_1 thuộc phần tử λ_2, ... Thế thì $A - \lambda I$ tương đương với $J - \lambda I$ và do đó A và J đồng dạng.

215. a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} n & 1 & & & \\ & n & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & n \end{vmatrix}$

216. a) Hai ma trận Jóocđăng J và J' đồng dạng với nhau khi và chỉ khi $J - \lambda I$ tương đương với $J' - \lambda I$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi J và J' có các nhân tử bất biến trùng nhau, do đó theo bài 214, J và J' có các khối Jóocđăng như nhau.

b) $(\lambda - \lambda_0)^n$.

c) Nếu $n > 1$ là cấp của khối Jóocđăng A phụ thuộc phần tử không, thì dạng chuẩn Jóocđăng của ma trận A^2 gồm hai khối Jóocđăng phụ thuộc phần tử không, có cấp $\frac{n}{2}$ nếu n chẵn và có cấp tương ứng là $\frac{n-1}{2}$ và $\frac{n+1}{2}$ nếu n lẻ.

217. Giả sử A là ma trận vuông đã cho,

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_k \end{bmatrix}$$

là dạng chuẩn Jóocđăng của A với các khối Jóocđăng

$$B_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

và $A = TBT^{-1}$. Giả sử

$$H_i = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix}$$

là ma trận vuông cùng cấp với B_i và

$$H = \begin{bmatrix} H_1 & & & 0 \\ & H_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & H_k \end{bmatrix}.$$

Dễ thấy rằng $B'_i = H_i^{-1} B_i H_i$, do đó $B' = H^{-1}BH$. Vì vậy $A' = T'^{-1} H^{-1} BHT' = T'^{-1} H^{-1} T^{-1} ATHT' = C^{-1} AC$, trong đó $C = THT'$ là một ma trận đối xứng không suy biến. Nếu đặt $D = C^{-1}A$ thì $D' = A'C'^{-1} = C^{-1}ACC^{-1} = D$, nghĩa là D cũng là một ma trận đối xứng và $A = CD$.

218. a) Chọn $y \in E$ và xét dạng tuyến tính $f(x) = \langle \varphi(x), y \rangle$. Ta chứng minh mọi dạng tuyến tính $f(x)$ trên E biểu diễn được dưới dạng $f(x) = \langle x, a \rangle$, trong đó $a \in E$ chỉ phụ thuộc f. Thật vậy, ký hiệu $V = \operatorname{Ker} f$. Nếu $V = E$ thì có thể đặt $f(x) = \langle x, 0 \rangle$. Nếu $V \neq E$ thì lấy $b \in V^*$ trực giao với V và ta sẽ chọn λ sao cho $a = \lambda b$ thỏa mãn $f(x) = \langle x, a \rangle$.

Với $x_1 \in E$ giả sử $f(x_1) = \alpha$, $f(b) = \beta$. Thế thì

$$f\left(x_1 - \frac{\alpha}{\beta} b\right) = f(x_1) - \frac{\alpha}{\beta} f(b) = 0.$$

Ký hiệu $c = x_1 - \frac{\alpha}{\beta} b$. Thế thì $c \in V$, $x_1 = c + \frac{\alpha}{\beta} b$ và

$$\langle x_1, a \rangle = \overline{\lambda} \langle c, b \rangle + \overline{\lambda} \frac{\alpha}{\beta} \langle b, b \rangle = \overline{\lambda} \frac{\alpha}{\beta} \langle b, b \rangle.$$

Vậy nếu ta lấy $\lambda = \overline{\beta} \langle b, b \rangle^{-1}$ thì

$$\langle x_1, a \rangle = \alpha = f(x_1).$$

Vậy tồn tại $a \in E$ để $f(x) = \langle \varphi(x), y \rangle = \langle x, a \rangle$ và a chỉ phụ thuộc y. Xét $\varphi^* : E \to E$ mà $\varphi^*(y) = a$ thì ta rằng $\langle x, \varphi^*(y) \rangle = \langle \varphi(x), y \rangle$.

Giả sử có $\varphi' : E \to E$ cũng thỏa mãn $\langle \varphi(x), y\rangle = \langle x, \varphi'(y)\rangle$. Thế thì với mọi $x, y \in E$ ta có

$$\langle x, \varphi^*(y)\rangle - \langle x, \varphi'(y)\rangle = \langle x, \varphi^*(y) - \varphi'(y)\rangle = 0.$$

Do đó $\varphi^*(y) = \varphi'(y)$ với mọi $y \in E$ hay $\varphi^* = \varphi'$. Cuối cùng từ tính duy nhất đó ta suy ra φ^* tuyến tính:

$$\begin{aligned}\langle x, \varphi^*(\alpha u + \beta v)\rangle &= \langle \varphi(x), \alpha u + \beta v\rangle = \\ &= \overline{\alpha}\ \langle \varphi(x), u\rangle + \overline{\beta}\ \langle \varphi(x), v\rangle = \\ &= \overline{\alpha}\ \langle x, \varphi^*(u)\rangle + \overline{\beta}\ \langle x, \varphi^*(v)\rangle = \\ &= \langle x, \alpha\varphi^*(u) + \beta\varphi^*(v)\rangle.\end{aligned}$$

Do đó theo tính duy nhất vừa chứng minh ta có

$$\varphi^*(\alpha u + \beta v) = \alpha\varphi^*(u) + \beta\varphi^*(v).$$

d) Giả sử cơ sở trực chuẩn là $e_1, e_2, \dots, e_n$. Nếu

$$\varphi(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j \text{ thì } \langle \varphi(e_i), e_j\rangle = \alpha_{ij}.$$

Giả sử $$\varphi^*(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} e_j. \text{ Thế thì}$$

$$\alpha_{ij} = \langle e_i, \varphi^*(e_j)\rangle = \overline{\beta}_{ji}, \text{ do đó}$$

$$B = [\beta_{ij}] = [\overline{\alpha}_{ji}] = \overline{A}^t.$$

219. a) Ma trận của φ^* đối với cơ sở u_1, u_2, u_3 là

$$\begin{bmatrix} 177 & -170 & 26 \\ 125 & -118 & 19 \\ -393 & 383 & -56 \end{bmatrix}$$

b) Ma trận của φ^* đối với cơ sở e_1, e_2, e_3 là

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

220. a) Vì $(L+M)^* = L^* \cap M^*$ và $(L \cap M)^* = L^* + M^*$ nên đẳng thức $E = L \oplus M$ kéo theo đẳng thức $E = L^* \oplus M^*$.

b) Với $x \in E$ ta có $x = y + z$, $y \in L$, $z \in M$. Giả sử $y_1 \in L^*$, $z_1 \in M^*$. Thế thì

$$\langle x, \varphi^*(y_1)\rangle = \langle \varphi(x), y_1\rangle = \langle y, y_1\rangle = 0.$$

Do đó $\varphi^*(y_1) = 0$ với mọi $y_1 \in L^*$. Tương tự,

$$\langle x, \varphi^*(z_1)\rangle = \langle \varphi(x), z_1\rangle = \langle y, z_1\rangle = \langle x, z_1\rangle.$$

Vậy $\langle x, \varphi^*(z_1)\rangle = \langle x, z_1\rangle$ với mọi $x \in E$, do đó

$$\varphi^*(z_1) = z_1 \text{ với mọi } z_1 \in M^*.$$

Vậy φ^* là một phép chiếu lên M^* song song với L^*.

221. a) Giả sử $y \in L^*$, $x \in L$. Thế thì

$$0 = \langle \varphi(x), y\rangle = \langle x, \varphi^*(y)\rangle,$$

do đó $\varphi^*(y) \in L^*$.

b) Vì φ^* có không gian con bất biến một chiều $E_1 = L(e_1)$ nên theo câu a) φ có không gian con bất biến $n-1$ chiều E_1^*. Lại xét cái thu hẹp φ_1 của φ trên E_1^*, lý luận tương tự ta được không gian con $n-2$ chiều của E nằm trong E_1^* bất biến đối với φ_1, và do đó bất biến đối với φ,...

c) Theo câu b), φ có dãy không gian con bất biến

$$E = L_n \supset L_{n-1} \supset \ldots \supset L_1,$$

mà $\dim L_i = i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ta tìm được cơ sở trực chuẩn $e_1, e_2, \ldots, e_n$ mà $e_i \in L_i$. Đối với cơ sở trực chuẩn đó, rõ ràng ma trận của phép biến đổi tuyến tính φ có dạng tam giác.

222. a) Với mọi $x, y \in E$ và mọi số phức α, β ta có

$$\langle \varphi(\alpha x + \beta y) - \alpha\varphi(x) - \beta\varphi(y), \varphi(\alpha x + \beta y) - \alpha\varphi(x) - \beta\varphi(y)\rangle = \langle \varphi(\alpha x + \beta y), \varphi(\alpha x + \beta y)\rangle - \bar{\alpha}\langle \varphi(\alpha x + \beta y), \varphi(x)\rangle - \bar{\beta}\langle \varphi(\alpha x + \beta y), \varphi(y)\rangle - \alpha\langle \varphi(x), \varphi(\alpha x + \beta y)\rangle +$$

$$+ \alpha\bar{\alpha}\langle \varphi(x), \varphi(x)\rangle + \alpha\bar{\beta}\langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle - \beta\langle \varphi(y), \varphi(\alpha x + \beta y)\rangle + \beta\bar{\alpha}\langle \varphi(y), \varphi(x)\rangle + \beta\bar{\beta}\langle \varphi(y), \varphi(y)\rangle =$$

$$= \langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y\rangle - \bar{\alpha}\langle \alpha x + \beta y, x\rangle - \bar{\beta}\langle \alpha x + \beta y, y\rangle - \alpha\langle x, \alpha x + \beta y\rangle + \alpha\bar{\alpha}\langle x, x\rangle + \alpha\bar{\beta} \times \langle x, y\rangle - \beta\langle y, \alpha x + \beta y\rangle + \beta\bar{\alpha}\langle y, x\rangle + \beta\bar{\beta}\langle y, y\rangle =$$

$$= \langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y\rangle - \langle \alpha x + \beta y, \alpha x\rangle - \langle \alpha x + \beta y, \beta y\rangle - \langle \alpha x, \alpha x + \beta y\rangle + \langle \alpha x, \alpha x\rangle + \langle \alpha x, \beta y\rangle - \langle \beta y, \alpha x + \beta y\rangle + \langle \beta y, \alpha x\rangle + \langle \beta y, \beta y\rangle = 0.$$

Do đó $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$.

b) Theo giả thiết ta có với mọi $x, y \in E$ và mọi số phức β:

$$\langle \varphi(x + \beta y), \varphi(x + \beta y)\rangle = \langle x + \beta y, x + \beta y\rangle .$$

Khai triển hai vế ta đi tới đẳng thức

$$\bar{\beta}\langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle + \beta\langle \varphi(y), \varphi(x)\rangle = \bar{\beta}\langle x, y\rangle + \beta\langle y, x\rangle$$

Lấy $\beta = 1$ ta được

$$\langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle + \langle \varphi(y), \varphi(x)\rangle = \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle \quad (1)$$

Lấy $\beta = i$ ta được

$$-i\langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle + i\langle \varphi(y), \varphi(x)\rangle = -i\langle x, y\rangle + i\langle y, x\rangle$$

hay giản ước cho i:

$$-\langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle + \langle \varphi(y), \varphi(x)\rangle = -\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle . \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra

$$\langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle = \langle x, y\rangle .$$

223. a) Nếu φ là một phép biến đổi unita rõ ràng φ biến một cơ sở trực chuẩn thành một cơ sở trực chuẩn. Đảo lại giả sử φ biến cơ sở trực chuẩn $e_1, e_2, \ldots, e_n$ thành một cơ sở trực chuẩn $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$, và $x, y \in E$. Ta có

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \quad y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i, \text{ do đó}$$

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(e_i), \; \varphi(y) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi(e_i).$$

Nhưng vì $\{e_i\}$ và $\{\varphi(e_i)\}$ là các cơ sở trực chuẩn nên

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle .$$

b) Giả sử đối với cơ sở trực chuẩn $e_1, \ldots, e_n$ của E ma trận của phép biến đổi unita φ là $A = [\alpha_{ij}]$. Thế thì

$$\varphi(e_i) = \sum \alpha_{ij} e_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Theo câu a), $\varphi(e_i)$ cũng lập thành một cơ sở trực chuẩn nên

$$\langle \varphi(e_i), \varphi(e_j) \rangle = \delta_{ij}, \text{ từ đó suy ra } A\overline{A}' = I,$$

tức là A là một ma trận unita.

Đảo lại nếu ma trận A của phép biến đổi tuyến tính φ đối với cơ sở trực chuẩn $\{e_i\}$ là một ma trận unita thì rõ ràng $\{\varphi(e_i)\}$ cũng là một cơ sở trực chuẩn, do đó theo câu a), φ là một phép biến đổi unita.

224. a) Với $x \in L$, $y \in L^*$ ta có

$$\langle\varphi(x), \varphi(y)\rangle = \langle x, y\rangle = 0$$

Do đó vì $\varphi(L) = L$ nên $\varphi(y) \in L^*$.

b) Ta có thể chứng minh một cách tổng quát rằng: Mọi phép biến đổi tuyến tính φ của một không gian vecto n chiều trên trường số thực có không gian con bất biến 1 chiều hoặc 2 chiều.

Thật vậy, nếu đa thức đặc trưng của φ có nghiệm thực thì φ có không gian con bất biến một chiều sinh bởi vecto riêng ứng với nghiệm đó. Giả sử đa thức đặc trưng của φ có nghiệm phức $\lambda = a + bi$, a, b thực. Trong E_n chọn một cơ sở $e_1, \ldots, e_n$ nào đó và giả sử A là ma trận của φ đối với cơ sở đó. Xét phương trình $XA = \lambda X$, trong đó $X = [x_1, \ldots, x_n]$ là ma trận các ẩn x_i trên trường số phức.

Phương trình đó tương đương với

$$X(A - \lambda I) = 0$$

là một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có định thức $|A - \lambda I| = 0$ nên hệ có nghiệm khác không.

$$x_j = t_j + iv_j,\ t_j,\ v_j \text{ thực},\ j = 1, \ldots, n.$$

Thay vào phương trình trên rồi tách phần thực và phần ảo ta được

$$[t_1 \ldots t_n]A = a[t_1 \ldots t_n] - b[v_1 \ldots v_n],$$
$$[v_1 \ldots v_n]A = a[v_1 \ldots v_n] + b[t_1 \ldots t_n].$$

Nếu t, $v \in E_n$ mà $t = \Sigma t_j e_j$ và $v = \Sigma v_j e_j$ thì hai đẳng thức cuối là:

$$\varphi(t) = at - bv,$$
$$\varphi(v) = av + bt$$

chứng tỏ $L(t, v)$ là không gian con hai chiều của E_n bất biến đối với φ.

c) Theo câu b), φ có không gian bất biến 1 chiều hoặc 2 chiều. Nếu φ có không gian con bất biến 1 chiều $E_1 = L(e_1)$, trong đó e_1 là một vectơ định chuẩn thì phép biến đổi φ_1 thu hẹp của φ trên E_1 có dạng $\varphi_1(x) = \pm x$. Nếu φ không có không gian con bất biến 1 chiều nào thì chọn một không gian con bất biến 2 chiều $E_1 = L(e_1, e_2)$ trong đó e_1, e_2 là cơ sở trực chuẩn của E_1. Ta chứng minh rằng phép biến đổi φ_1 thu hẹp của φ trên E_1 có ma trận đối với cơ sở e_1, e_2 là

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Thật vậy, vì φ_1 là một phép biến đổi trực giao nên ma trận của φ_1 đối với cơ sở e_1, e_2 có dạng $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ trong đó $|A| = ad - bc = \pm 1$. Nếu $|A| = -1$ thì ta có $a = -d$, $b = c$ nên $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$ với $a^2 + b^2 = 1$. Lúc đó đa thức đặc trưng $|A - \lambda I| = \lambda^2 - 1$ có nghiệm, trái giả thiết φ không có không gian con bất biến một chiều. Vậy $|A| = 1$ và $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ với $a^2 + b^2 = 1$ (lúc đó $a = d$, $b = -c$). Đặt $a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$ ta được

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Xét phần bù trực giao E_1^* của E_1. Theo câu a) E_1^* cũng bất biến đối với φ và $\dim E_1^* = n - 1$ hoặc $n - 2$. Phép biến đổi φ_2 thu hẹp của φ trên E_1^* lại có không gian con bất biến 1 hoặc 2 chiều, và tiếp tục lý luận tương tự phần

rên cho E_1^* ..... Làm như vậy ta đi đến một cơ sở trực chuẩn của E_n mà đối với cơ sở đó ma trận của φ có dạng

$$\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & -1 & & & & & & & \\
 & & & & \ddots & & & & & & \\
 & & & & & -1 & & & & & \\
 & & & & & & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & & & \\
 & & & & & & -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & \\
 & & & & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & & & & \cos\theta_k & \sin\theta_k \\
 & & & & & & & & & -\sin\theta_k & \cos\theta_k
\end{bmatrix}$$

trong đó ± 1 ứng với các không gian con bất biến 1 chiều, còn khối $\begin{bmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix}$ ứng với không gian con bất biến 2 chiều.

225. a) Chứng minh tương tự câu a) bài **224**.

b) Giả sử giá trị riêng λ ứng với vectơ riêng x của φ. Thế thì $\varphi(x) = \lambda x$, do đó

$$\langle \lambda x, \lambda x\rangle = \lambda\bar{\lambda}\langle x, x\rangle = \langle x, x\rangle.$$

Vậy $\lambda\bar{\lambda} = |\lambda|^2 = 1$.

c) φ có ít nhất một vectơ riêng, do đó có vectơ riêng định chuẩn e_1. Giả sử $E_1 = L(e_1)$. Theo câu a) phần bù trực giao E_1^* của E_1 cũng bất biến đối với φ, do đó cái thu hẹp φ_1 của φ trên E_1^* cũng có một vectơ riêng định chuẩn

e_2. Tiếp tục lý luận như vậy ta được một cơ sở trực chuẩn $e_1, e_2, \ldots, e_n$ của E_n mà đối với nó ma trận của φ có dạng

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

trong đó $|\lambda_i| = 1$.

226. a) Suy từ câu d) bài tập 218.

b) Ta chứng minh mọi giá trị riêng của phép biến đổi Ecmit φ đều thực. Thật vậy giả sử λ là giá trị riêng ứng với vectơ riêng x. Thế thì $\varphi(x) = \lambda x$ và do đó

$$\langle x, \varphi(x)\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \bar{\lambda}\langle x, x\rangle$$
$$= \langle \varphi(x), x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle.$$

Do đó vì $\langle x, x\rangle \neq 0$ nên $\lambda = \bar{\lambda}$.

Bây giờ ta chứng minh rằng nếu x là một vectơ riêng của phép biến đổi Ecmit φ thì $F = [L(x)]^*$ cũng bất biến đối với φ. Thật vậy với $y \in F$ thì $\langle y, x\rangle = 0$. Từ đó $\langle \varphi(y), x\rangle = \langle y, \varphi(x)\rangle = \langle y, \lambda x\rangle = \bar{\lambda}\langle y, x\rangle = 0$, nghĩa là $\varphi(y) \in F$.

Đối với phép biến đổi Ecmit φ có vectơ riêng định chuẩn e_1, theo trên $F_1 = [L(e_1)]^*$ là một không gian con $n-$ chiều bất biến đối với φ, do đó trong F_1 tồn tại vectơ riêng định chuẩn e_2 đối với φ.

Tiếp tục xét tương tự, ta được một cơ sở trực chuẩn của E_n gồm toàn vectơ riêng của φ. Đối với cơ sở đó ma trận của φ là ma trận chéo mà trên đường chéo là các giá trị riêng thực của φ.

227. a) Giả sử φ là ψ là các phép biến đổi đối xứng lệch của không gian unita E, a là một số thực tùy ý. Thế thì

$$(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^* = -\varphi - \psi = -(\varphi + \psi),$$
$$(a\varphi)^* = \bar{a}\varphi^* = a\varphi^* = -a\varphi.$$

b) Suy từ câu d) bài tập 218.

c) Trước hết ta chứng minh các giá trị riêng của φ hoặc bằng 0, hoặc thuần ảo. Giả sử λ là giá trị riêng của φ ứng với vectơ riêng x. Thế thì

$$\langle x, \varphi(x)\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \overline{\lambda}\langle x, x\rangle =$$
$$= \langle -\varphi(x), x\rangle = \langle -\lambda x, x\rangle = -\lambda\langle x, x\rangle.$$

Vậy $\overline{\lambda} = -\lambda$, do đó hoặc $\lambda = 0$ hoặc $\lambda = ib$, b thực. Sau đó ta chứng minh tương tự câu b) của bài trên.

228. a) Với $x \in L$, $y \in L^*$ ta có

$$\langle x, \varphi(y)\rangle = -\langle \varphi(x), y\rangle = 0.$$

Do đó $\varphi(y) \in L^*$.

b) Xem chứng minh câu b) bài tập 224.

c) Không gian E phân tích thành tổng trực tiếp của các không gian con 1 chiều hoặc 2 chiều bất biến đối với φ. Trên mỗi không gian con đó ánh xạ thu hẹp của φ đối với một cơ sở trực chuẩn có dạng là một số thực ρ hoặc là một ma trận cấp hai $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$. Theo câu b) bài trên các ma trận đó thỏa mãn hệ thức $A' = -A$, do đó $-\rho = \rho$ suy ra $\rho = 0$, và $\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ suy ra $\alpha = \delta = 0$, $\beta = -\gamma$.

229. a) Suy từ các định nghĩa $\varphi\varphi^* = \varepsilon$, $\varphi^* = \varphi$ và $\varphi^* = -\varphi$.

b) Giả sử x là vectơ riêng của φ ứng với giá trị riêng λ. Ta chứng minh x là vectơ riêng của φ^* ứng với giá trị riêng $\overline{\lambda}$. Nếu ký hiệu ε là phép biến đổi đồng nhất của E thì ta có

$$) = \langle \varphi(x) - \lambda x, \varphi(x) - \lambda x\rangle =$$
$$= \langle (\varphi - \lambda\varepsilon)(x), (\varphi - \lambda\varepsilon)(x)\rangle =$$
$$= \langle x, [(\varphi - \lambda\varepsilon)^*(\varphi - \lambda\varepsilon)](x)\rangle =$$
$$= \langle x, [(\varphi^* - \overline{\lambda}\varepsilon)(\varphi - \lambda\varepsilon)](x)\rangle =$$
$$= \langle x, [(\varphi - \lambda\varepsilon)(\varphi^* - \overline{\lambda}\varepsilon)](x)\rangle =$$
$$= \langle (\varphi^* - \overline{\lambda}\varepsilon)(x), (\varphi^* - \overline{\lambda}\varepsilon)(x)\rangle =$$
$$= \langle \varphi^*(x) - \overline{\lambda}x, \varphi^*(x) - \overline{\lambda}x\rangle.$$

Vậy $\varphi^*(x) = \overline{\lambda}x$, và x là vectơ riêng của φ^* ứng với giá trị riêng $\overline{\lambda}$.

c) Giả sử $\varphi(x) = \lambda x$, $\varphi(y) = \rho y$, $\lambda \neq \rho$.

Thế thì theo câu (b) ta có

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle \varphi(x), y\rangle = \langle x, \varphi^*(y)\rangle = \rho\langle x, y\rangle.$$

Do đó

$$(\lambda - \rho)\langle x, y\rangle = 0 \text{ suy ra } \langle x, y\rangle = 0.$$

d) Giả sử φ có vectơ riêng định chuẩn e_1. Ký hiệu $E_1 = L(e_1)$ và E_1^* là bù trực giao của E_1. Ta chứng minh E_1^* là không gian con bất biến đối với φ. Giả sử $y \in E_1^*$. Thế thì

$$\langle \varphi(y), e_1\rangle = \langle y, \varphi^*(e_1)\rangle = \langle y, \overline{\lambda}_1 e_1\rangle = \lambda_1\langle y, e_1\rangle = 0$$

Vậy $\varphi(y) \in E_1^*$.

E_1^* là một không gian $n - 1$ chiều và trong E_1^* lại có một vectơ riêng định chuẩn e_2 của φ. Tiếp tục lý luận như vậy ta đi tới một cơ sở trực chuẩn của E gồm toàn vecto riêng của φ. Đối với cơ sở đó ma trận của φ có dạng chéo

230. a) Đặt $\varphi_1 = \dfrac{\varphi + \varphi^*}{2}$ và $\varphi_2 = \dfrac{\varphi - \varphi^*}{2}$

Thế thì φ_1 là một phép biến đổi Ecmit, còn φ_2 là một phép biến đổi đối xứng lệch và $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Mặt khác

nếu $\varphi = \varphi_1' + \varphi_2'$ trong đó φ_1' là phép biến đổi Ecmit còn φ_2' là phép biến đổi đối xứng lệch thì

$$\varphi_1' = \frac{\varphi + \varphi^*}{2} = \varphi_1, \varphi_2' = \frac{\varphi - \varphi^*}{2} = \varphi_2.$$

b) Tương tự câu (a), đặt

$$\varphi_1 = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \varphi_2 = \frac{-i\varphi + i\varphi^*}{2}.$$

c) Giả sử $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$,
trong đó φ_1 là phép biến đổi Ecmit, còn φ_2 là phép biến đổi đối xứng lệch. Thế thì $\varphi^* = \varphi_1 - \varphi_2$,
do đó $\varphi\varphi^* = \varphi_1^2 - \varphi_1\varphi_2 + \varphi_2\varphi_1 - \varphi_2^2$.

$$\varphi^*\varphi = \varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2 - \varphi_2\varphi_1 - \varphi_2^2.$$

Vì vậy $\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$ khi và chỉ khi

$$\varphi_1\varphi_2 = \varphi_2\varphi_1.$$

CHƯƠNG V

DẠNG SONG TUYẾN TÍNH VÀ DẠNG TOÀN PHƯƠNG

231. a) Với $m = 2$ tính trực tiếp bằng phép nhân ma trận. Áp dụng liên tiếp m lần hoặc dùng quy nạp.

b) $F = (x_1 + x_2 - x_3)^2 - x_3^2 + 8x_2x_3$

Dùng phép biến đổi thứ nhất, ta đưa F về dạng

$$F' = x_1'^2 - x_2'^2 + 8x_2' x_3' = x_1'^2 - (x_2' - 4x_3')^2 + 16x_3'^2$$

Dùng phép biến đổi thứ hai, ta đưa về

$$F'' = x_1''^2 - x_2''^2 + x_3''^2 .$$

Ma trận của phép biến đổi đưa các x_i về các x_i'' là

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

232. a) Có thể viết dạng song tuyến tính F dưới dạng ma trận

$$F = XAY' \tag{1}$$

trong đó $X = [x_1, x_2, ..., x_n]$, $Y = [y_1, y_2, ..., y_n]$.
Giả sử ta dùng các phép biến đổi các hệ thống ẩn sau :

$$x_j = \sum x_k' t_{kj}, \; y_j = \sum y_k' s_{kj}$$

hoặc viết dưới dạng ma trận là

$$X = X_1 T, \;\; Y = Y_1 S. \tag{2}$$

Thay (2) vào (1) ta được

$$F = X_1 TAS'Y_1' = X_1 A_1 Y_1',$$

trong đó $A_1 = TAS'$ là ma trận của dạng đã biến đổi. Từ đó dùng định nghĩa ma trận tương đương, suy ra điều phải chứng minh.

b) Đưa các ma trận của chúng về dạng chéo và áp dụng câu trên.

233. a) Đặt $S = T$ trong bài trên.

b) Nếu $A' = \pm A$ thì từ câu trên ta được

$$A_1' = \pm TA'T' = \pm A_1.$$

234. a) Vì F là dạng Ecmit nên $F = XA\overline{Y}'$.

Vì ta đã dùng các phép biến đổi (2) của bài trên, nên ma trận của dạng Ecmit mới sẽ là $A' = TA\overline{S}'$ (phương pháp lý luận tương tự câu a) bài trên).

b) Dùng giả thiết $\overline{A}' = A$ và phương pháp tương tự câu b) bài trên.

235. a) Dạng Ecmit có thể đưa về dạng mới với ma trận $A_1 = TA\overline{S}'$ (xem bài trước). Đưa ma trận A_1 về dạng kẻ ô chéo $A_1 = E_r \oplus O_{n-r}$, trong đó E_r là ma trận đơn vị cấp r, O_{n-r} là ma trận không cấp $n-r$. Khi đó dùng định nghĩa ma trận của dạng Ecmit, suy ra điều phải chứng minh.

b) Vì A là ma trận đối xứng nên tìm được ma trận unita thực U sao cho $A_1 = UAU^{-1}$ có dạng chéo (chương ma trận). Nhưng vì U là ma trận unita, tức $U^{-1} = U'$ nên $A_1 = UAU'$ có dạng chéo. Vậy A tương đẳng với ma trận chéo A_1.

c) Là hệ quả của câu trên.

236. a) Giả sử F là một dạng Ecmit với ma trận đối xứng Ecmit A. Theo chương ma trận, tồn tại một ma trận unita U sao cho ma trận $A_1 = UAU^{-1}$ có dạng chéo thực. Vì U là ma trận unita nên $U^{-1} = \overline{U}'$, do đó $A_1 = UA\overline{U}'$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

b) Là hệ quả của câu trên.

237. a) Trong dạng toàn phương $F(x) = XAX'$, dùng phép biến đổi các ẩn với ma trận T, ta được dạng mới là

$$F(x) = XAX' = X_1TAT'X_1'$$

Với $X = [x_1, \ldots, x_n]$, $X_1 = [x_1', \ldots, x_n']$

Ma trận của dạng mới là $A_1 = TAT'$.

Vậy quy luật biến đổi ma trận của dạng toàn phương cũng y như đối với dạng song tuyến tính cực. Từ đó có thể áp dụng các kết quả về dạng song tuyến tính trong các bài trên hoặc chứng minh trực tiếp tương tự.

b) Là hệ quả của câu trên.

c) Nếu không cần đến tính trực giao của phép biến đổi tuyến tính về các ẩn, ta có thể biến đổi tiếp như sau: Nếu trong dạng chính tắc ở câu a)

$$c_1x_1^2 + \dots + c_rx_r^2$$

mà $c_1, \dots, c_s$ dương, còn $c_{s+1}, \dots, c_r$ âm thì ta thực hiện phép biến đổi tuyến tính

$$x'_i = \sqrt{c_i}\, x_i, \quad x'_j = \sqrt{-c_j}\, x_j$$

$$(i = 1, \dots, s\,;\ j = s + 1, \dots, r).$$

Khi đó dạng toàn phương sẽ đưa về dạng chuẩn tắc nhờ một phép biến đổi tuyến tính.

238. Tương tự như bài trên, chỉ cần lưu ý rằng biểu thức của dạng toàn phương Ecmit là

$$F(x) = \sum a_{ij}x_i\overline{x}_j = XA\overline{X}'.$$

239. Dùng phản ứng. Giả sử dạng toàn phương thức

$$c_1x_1^2 + \dots + c_sx_s^2 - c_{s+1}x_{s+1}^2 - \dots - c_rx_r^2 \ (c_i > 0)$$

nhờ phép biến đổi $x_i = \sum x'_\lambda t_{\lambda i}$ lại đưa được về dạng chéo

$$d_1x_1'^2 + \dots + d_tx_t'^2 - d_{t+1}x_{t+1}'^2 - \dots - d_rx_r'^2 \ (d_i > 0$$

với $s < t$ chẳng hạn. Điều đó có nghĩa là nếu trong đẳng thức

$$c_1x_1^2 + ... + c_sx_s^2 - c_{s+1}x_{s+1}^2 - ... - c_rx_r^2 =$$

$$= d_1x_1'^2 + ... + d_tx_t'^2 - d_{t+1}x_{t+1}'^2 - ... - d_rx_r'^2$$

ta thay x_i bởi biểu thức của chúng qua x_i', thì ta sẽ được một đồng nhất thức. Viết đồng nhất thức dưới dạng

$$x_1 = 0, ..., x_s = 0, \ x_{s+1}' = 0, ..., x_n' = 0 \qquad (*)$$

trong đó ta hiểu $x_1, ..., x_s$ là biểu thức của chúng qua $x_1', ..., x_n'$. Hệ (*) là một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất đối với các ẩn $x_1', ..., x_n'$ với số phương trình bằng $s + (n - t) = n - (t - s)$ bé hơn ẩn số vì $t > s$. Nhưng trong trường hợp đó hệ (*) phải có ít nhất một nghiệm khác không

$$x_1' = e_1, ..., x_t' = e_t, \quad x_{t+1}' = 0, ... x_n' = 0$$

Thay nó vào đồng nhất thức trên, ta được

$$d_1e_1^2 + ... + d_te_t^2 + c_{t+1}x_{t+1}^2 + ... + c_rx_r^2 = 0.$$

Vì các d_i, c_j đều dương, e_i^2, x_j^2 đều không âm nên từ đó suy ra $e_1 = ... = e_t = 0$ trái với giả thiết là nghiệm của hệ (*) không tầm thường.

240. a) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$;

b) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$;

c) $y_1^2 - y_2^2$;

d) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$;

e) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

241. a) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; $x_1 = y_1 - \frac{1}{2} y_2 + \frac{5}{6} y_3$,

$x_2 = \frac{1}{2} y_2 - \frac{1}{6} y_3$, $x_3 = \frac{1}{3} y_3$.

b) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; $x_1 = \frac{1}{2} y_1 + y_2$

$x_2 = y_2 + y_3$. $x_3 = -y_2 + y_3$.

c) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$; $x_1 = y_1 - y_2 - y_3$.

$x_2 = y_1 + y_2 - y_3$. $x_3 = y_3$.

d) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} y_1 - \frac{5\sqrt{3}}{3} y_2 +$

$+ \frac{\sqrt{3}}{3} y_3$,

$x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} y_2 + \frac{\sqrt{3}}{3} y_3$.

$x_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} y_2 + \frac{\sqrt{3}}{3} y_3$.

e) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; $x_1 = -\frac{3}{4} y_1 - \frac{1}{4} y_2 +$

$+ \frac{\sqrt{3}}{6} y_3$.

$x_2 = -\frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{2} y_2$. $x_3 = \frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{2} y_2$.

f) $y_1^2 - y_2^2$; $x_1 = y_1 - y_2 - y_3$,

$x_2 = y_1 + y_2 - y_4$, $x_3 = y_3$, $x_4 = y_4$.

242. a) y_1^2 ; với $y_1 = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$, $y_2 = x_2, \dots,$

$$y_{i-1} = x_{i-1},\ y_i = x_1,\ y_{i+1} = x_{i+1}, \dots, y_n = x_n$$

nếu $a_i \neq 0$.

b) $$y_1^2 + \frac{3}{4} y_2^2 + \frac{4}{6} y_3^2 + \frac{5}{8} y_4^2 + \dots + \frac{n+1}{2n} y_n^2 \ ;$$

$$y_1 = x_1 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + \dots + x_n),$$

$$y_2 = x_2 + \frac{1}{3}(x_3 + x_4 + \dots + x_n),$$

. . . .

$$y_n = x_n.$$

c) $$y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - \frac{3}{4} y_4^2 - \frac{4}{6} y_5^2 - \frac{5}{8} y_6^2 - \dots - \frac{n-1}{2(n-2)} y_n^2 \ ;$$

$$y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + x_3 + x_4 + \dots + x_n$$

$$y_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2),$$

$$y_3 = x_3 + \frac{1}{2}(x_4 + x_5 + \dots + x_n);$$

$$y_4 = x_4 + \frac{1}{3}(x_5 + x_6 + \dots + x_n),$$

. . . . .

$$y_n = x_n.$$

Hướng dẫn: Đưa về bài trên.

d) Nếu n chẵn : $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 + \dots + y_{n-1}^2 - y_n^2$;

$$y_i = \frac{x_i + x_{i+1} + x_{i+2}}{2} \; (i = 1, 3, 5, \dots, n-3),$$

$$y_i = \frac{x_{i-1} - x_i + x_{i+1}}{2} \; (i = 2, 4, 6, \dots, n-2),$$

$$y_{n-1} = \frac{x_{n-1} + x_n}{2}, \quad y_n = \frac{x_{n-1} - x_n}{2}.$$

Nếu n lẻ : $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 + \dots + y_{n-2}^2 - y_{n-1}^2$

$$y_i = \frac{x_i + x_{i+1} + x_{i+2}}{2} \; (i = 1, 3, 5, \dots, n-2),$$

$$y_i = \frac{x_{i-1} - x_i + x_{i+1}}{2} \; (i = 2, 4, 6, \dots, n-1),$$

$$y_n = x_n.$$

e) $\frac{n-1}{n} y_1^2 + \frac{n-2}{n-1} y_2^2 + \dots + \frac{2}{3} y_{n-2}^2 +$

$$+ \frac{1}{2} y_{n-1}^2 \; ;$$

$$y_1 = x_1 - \frac{x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n-1},$$

$$y_2 = x_2 - \frac{x_3 + x_4 + \dots + x_n}{n-2},$$

. . . .

$$y_{n-1} = x_{n-1} - x_n,$$

$$y_n = x_n.$$

Hướng dẫn : Biểu diễn dạng đã cho thành dạng

$$F_1 = \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{2}{n} \sum_{j<i}^{n} x_i x_j$$

và áp dụng phương pháp quy nạp. Cách khác như sau : Thực hiện phép biến đổi : $z_1 = x_1 - s$, $z_2 = x_2 - s, \ldots,$ $z_{n-1} = x_{n-1} - s$, $z_n = x_n$ và cộng các đẳng thức đó lại, ta đưa dạng F về dạng

$$2\left(\sum_{i=1}^{n-1} z_i^2 + \sum_{i<j}^{n-1} z_i z_j\right).$$

Dùng kết quả câu b). Khi đó tìm phép biến đổi tuyến tính khá phức tạp.

f) $$(n-1)y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - \ldots - y_n^2 ;$$

$$y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n),$$

$$y_2 = \frac{1}{2}(-x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n),$$

$$y_3 = \frac{1}{2}(-x_1 - x_2 + x_3 + \ldots + x_n),$$

. . . .

$$y_n = \frac{1}{2}(-x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-1} + x_n).$$

243. a) Các dạng f_1 và f_2 tương đương nhau và không tương đương với f_3.

b) Các dạng f_2 và f_3 tương đương nhau và không tương đương với f_1.

244. a) Quan hệ R xác định bởi

$f_1 R f_2 \Leftrightarrow$ dạng f_1 tương đương với dạng f_2 là một quan hệ tương đương trên tập các dạng. Áp dụng định lý về sự chia lớp tương đương.

Trên trường số phức có $n + 1$ lớp.

Trên trường số thực có $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ lớp.

b) Hạng là số chẵn, ký số bằng không.

c) $\left[\frac{n - |s|}{2}\right] + 1$, trong đó $[x]$ là phần nguyên của số x.

245. Theo một bài tập ở trên, dạng đã cho có thể đưa về dạng chéo nhờ một phép biến đổi với ma trận unita U và ma trận của dạng mới là $A_1 = UA\overline{U}' = UAU^{-1}$. Vì A không những tương đẳng mà còn đồng dạng với A_1: nên đa thức đặc trưng của A và A_1 trùng nhau (xem một bài tập trước), vậy chỉ còn phải thử nghiệm tiêu chuẩn Jacobi đối với dạng chéo $c_1 x_1 \overline{x}_1 + \ldots + c_r x_r \overline{x}_r$. Đa thức đặc trưng của nó là,

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - c_1)(\lambda - c_2)\ldots(\lambda - c_r) =$$
$$= \lambda^n - \sigma_1 \lambda^{n-1} + \sigma_2 \lambda^{n-2} - \ldots$$

Nếu tất cả các c_i đều dương thì định lý Viet chứng tỏ rằng các hệ số của $\varphi(\lambda)$ có tính chất phải tìm. Đảo lại, giả sử các hệ số của một đa thức nào đó khác không, có dấu đan nhau và các nghiệm của đa thức đều thực. Thế thì cần chứng minh rằng tất cả các nghiệm của nó đều dương. Dùng quy nạp: giả thiết rằng đối với tất cả các đa thức bậc bé hơn, điều đó đã được chứng minh. Khi đó $\varphi(\lambda)$ có $n - 1$ nghiệm dương (vì nếu tất cả các giả thiết đều thỏa mãn đối với $\varphi(\lambda)$ thì chúng cũng thỏa mãn cả đối với $\varphi'(\lambda)$). Nhưng trong trường hợp đó $\varphi(\lambda)$ có không ít hơn $n - 1$ nghiệm dương theo quy định lý Rôlơ và nghiệm thứ

n sau cũng phải dương vì theo giả thiết tích của tất cả các nghiệm của $\varphi(\lambda)$ là dương.]

246. Để chứng minh mệnh đề b) chẳng hạn, ta xét dạng $f_\varepsilon = f + \varepsilon g$, trong đó $\varepsilon > 0$ và g là tổng bình phương của các ẩn. Khi chứng minh điều kiện ắt có, thử nghiệm rằng $f_\varepsilon > 0$ và đối với các định thức con chính tương ứng D và D_ε của các dạng f và f_ε ta có $D = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} D_\varepsilon$. Khi chứng minh điều kiện đủ, bằng cách phân tích D_ε theo các lũy thừa của ε, thử nghiệm rằng $D_\varepsilon > 0$ và chứng tỏ rằng đối với các giá trị bất kỳ của các ẩn ta có

$$f = \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon.$$

c) Dạng $f_1 = -x_2^2$ hoặc dạng không suy biến $f_2 = -x_2^2 + 2x_1x_3$ có các định thức con góc không âm nhưng không phải là dạng không âm.

247. a) $\lambda > 2$.

b) $|\lambda| < \sqrt{\frac{5}{3}}$.

c) $-0,8 < \lambda < 0$.

d) Không tồn tại λ như vậy.

248. a) Giả sử $g = f + l^2$, trong đó $l = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$. Thay đổi thứ tự các ẩn, đi tới trường hợp $c_n \neq 0$, thực hiện phép biến đổi

$$y_i = x_i \ (i = 1, \dots, n-1), \ y_n = \frac{l}{c_n},$$

rồi chứng minh rằng đối với các dạng mới thì

$$D_{g_1} = D_{f_1} + c_n^2 D_{n-1},$$

trong đó D_{n-1} là định thức con góc cấp $n-1$ của dạng f_1.

b) Biểu diễn dạng f thành

$$f = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n\right)^2 + f_1(x_2, \dots, x_n)$$

và dùng câu trên chứng minh rằng

$$D_f = a_{11} D_{f_1} \leqslant a_{11} D_\varphi.$$

c) Dùng dạng chính tắc của dạng đã cho.

249. a) Dùng định nghĩa phép biến đổi tam giác và ma trận không suy biến, hoặc dùng ma trận của các phép biến đổi đó và chứng minh trực tiếp.

b) Xét các dạng

$$f_k = \sum_{i, j=1}^{k} a_{ij} x_i x_j \ (k = 1, \dots, n).$$

250. a) Tính ắt có của các điều kiện (2) suy ra từ sự bất biến của các định thức con góc qua các phép biến đổi tam giác (xem bài trước). Để chứng minh các điều kiện đó là đủ, có thể dùng quy nạp theo số ẩn n.

b). Để chứng minh các đẳng thức (3) cũng dùng bài trước: các định thức con góc không đổi qua các phép biến đổi tam giác.

251. a) Ngoài cách đã gặp trong một bài trên (dùng lý thuyết ma trận), có thể chứng minh trực tiếp: đa thức đặc trưng $| A - \lambda E |$ không thay đổi qua các phép biến đổi trực giao của dạng f.

b) $4 y_1^2 + 4 y_2^2 - 2 y_3^2$.

252. a) $6 y_1^2 + 6 y_2^2 + 9 y_3^2$.

b) $y_1^2 + \sqrt{3}\, y_2^2 - \sqrt{3}\, y_3^2$.

c) $3 y_1^2 + (1 + \sqrt{17})\, y_2^2 + (1 - \sqrt{17})\, y_3^2$.

d) $\sum_{k=1}^{n} \cos \frac{\pi k}{n+1} y_k^2.$

253. a) $3y_1^2 + 6y_2^2 + 9 y_3^2$;

$$x_1 = \frac{2}{3} y_1 - \frac{1}{3} y_2 + \frac{2}{3} y_3,$$

$$x_2 = \frac{2}{3} y_1 + \frac{2}{3} y_2 - \frac{1}{3} y_3 ;$$

$$x_3 = - \frac{1}{3} y_1 + \frac{2}{3} y_2 + \frac{2}{3} y_3.$$

b) $9y_1^2 + 18y_2^2 - 9y_3^2$;

$$x_1 = \frac{2}{3} y_1 + \frac{2}{3} y_2 - \frac{1}{3} y_3,$$

$$x_2 = - \frac{1}{3} y_1 + \frac{2}{3} y_2 + \frac{2}{3} y_3 ;$$

$$x_3 = \frac{2}{3} y_1 - \frac{1}{3} y_2 + \frac{2}{3} y_3.$$

c) $3y_1^2 + 6y_2^2 - 2y_3^2$; $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 +$

$$\frac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_3,$$

$$x_2 = - \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} y$$

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 - \frac{2}{\sqrt{6}} y_2.$$

d) $5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$: $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_3$.

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_3 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_3 ;$$

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 - \frac{2}{\sqrt{6}} y_2.$$

e) $9y_1^2 + 18y_2^2 + 18y_3^2$; $x_1 = \frac{1}{3} y_1 - \frac{2}{3} y_2 + \frac{2}{3} y_3$

$$x_2 = \frac{2}{3} y_1 - \frac{1}{3} y_2 - \frac{2}{3} y_3,$$

$$x_3 = \frac{2}{3} y_1 + \frac{2}{3} y_2 + \frac{1}{3} y_3.$$

254. a) $\frac{n+1}{2} y_1^2 + \frac{1}{2} y_2^2 + \dots + \frac{1}{2} y_n^2$;

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} (x_1 + x_2 + \dots + x_n),$$

$$y_i = \frac{1}{\sqrt{i(i-1)}} [x_1 + x_2 + \dots + x_{i-1} - (i-1) x_i]$$

$$(i = 2, 3, \dots, n).$$

b) $\frac{n-1}{2} y_1^2 - \frac{1}{2} y_2^2 - \frac{1}{2} y_3^2 - \dots - \frac{1}{2} y_n^2$.

Có thể dùng ngay phép biến đổi trong câu trên.

255. a) Hoặc dùng tính chất của ma trận, hoặc chứng minh rằng đa thức đặc trưng của ma trận của dạng toàn phương không thay đổi qua phép biến đổi trực giao các ẩn của dạng.

b) Các dạng f và h tương đương trực giao với nhau, nhưng không tương đương trực giao với g.

c). Các dạng g và h tương đương trực giao với nhau, nhưng không tương đương trực giao với f.

256. a)
$$Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

b)
$$Q = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{-\sqrt{5}}{3} & \frac{-4\sqrt{5}}{15} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

257. a) Ta gọi c_k là tổng của tất cả các thừa số đứng trong định thức $|A - \lambda E|$ khi nhân k phần tử của đường chéo chính và lấy $k = 0$.

b) Áp dụng câu trên vào ma trận $B = A - \lambda_0 E$ và chứng tỏ rằng đa thức đặc trưng $|B - \mu E|$ của ma trận B sau khi thay $\mu = \lambda - \lambda_0$ sẽ biến thành đa thức đặc trưng $|A - \lambda E|$ của ma trận A.

c) Dùng câu trên chứng minh rằng các số đặc trưng của ma trận $A - \lambda_0 E$ thu được nhờ phép trừ bớt λ_0 từ các số đặc trưng của ma trận A.

258. Áp dụng bài trên.

259. a) Dùng định lý «Định thức của một tích các ma trận bằng tích các định thức của chúng».

b) Dùng câu trên.

c) Ma trận với các định thức con góc đều dương là ma trận trực giao khi và chỉ khi nó là ma trận đơn vị.

260. Dạng toàn phương f với ma trận $A'A$ là xác định dương, nghĩa là nhờ một phép biến đổi tam giác có thể đưa nó về dạng chính tắc với các hệ số dương $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Nếu C là ma trận của phép biến đổi đó, D là ma trận đường chéo với các phần tử trên đường chéo là

$$\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}$$

(tất cả các căn đều lấy giá trị dương) và $B = DC$, thì

$$A'A = C'D^2C = B'B,$$

trong đó ma trận B thỏa mãn các yêu cầu của bài toán Đặt $Q = AB^{-1}$. Thế thì

$$Q'Q = (AB^{-1})' (AB^{-1}) = (B')^{-1} (A'A) B^{-1} =$$
$$= (B')^{-1}B'BB^{-1} = E,$$

tức là ma trận Q trực giao và $A = QB$, còn nếu $A = Q_1B_1$ thì ma trận $Q^{-1}Q_1 = B\,B_1^{-1}$ là trực giao và tam giác với các phần tử dương trên đường chéo chính; nghĩa là đó là ma trận đơn vị. Do đó $Q = Q_1$ và $B = B_1$.

261. Ta chứng minh mệnh đề a) đối với sự biểu diễn $A = QB$ của dạng cần chứng minh. Ma trận $A'A$ đối xứng và dạng toàn phương với ma trận đó là xác định dương. Vậy tồn tại ma trận trực giao P sao cho $A'A = P'CP$, trong đó C là ma trận chéo với các phần tử dương trên đường chéo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Giả sử D là ma trận chéo với các phần tử $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}$ trên đường chéo và các căn đều lấy giá trị dương. Ta đặt $B = P'DP = P^{-1}DP$. Từ đó suy ra rằng B là ma trận đối xứng với các số đặc trưng dương, nghĩa là dạng toàn phương với ma trận B là xác định dương và các định thức con góc của nó đều dương. Hơn nữa

$$A'A = P^{-1}CP = P^{-1}D^2P = P^{-1}DP\,P^{-1}DP = B^2.$$

Đặt $Q = AB^{-1}$. Thế thì $A = QB$ và

$$Q'Q = (AB^{-1})'(AB^{-1}) = B'^{-1}(A'A)B^{-1} =$$
$$= B^{-1}B^2B^{-1} = E,$$

nghĩa là ma trận Q trực giao.

Giả sử đã cho hai sự biểu diễn dạng trên : $A = Q_1B_1 = Q_2B_2$. Thế thì $A'A = B_1^2 = B_2^2$.

Ký hiệu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$; $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$; $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ là các số đặc trưng của các ma trận $A'A$, B_1, B_2 tương ứng, sắp đặt theo thứ tự không tăng. Tất cả các số đó đều dương và $\mu_i^2 = \lambda_i = \nu_i^2$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, nghĩa là $\mu_i = \nu_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Giả sử C và D là các ma trận chéo với các phần tử $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ và $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ trên đường chéo. Tồn tại các ma trận trực giao U và V sao cho $B_1 = U'DU$, $B_2 = V'DU$. Như vậy $B_1^2 = U'CU$, $B_2^2 = V'CV$, do đó $U'CU = V'CV$. $CUV' = UV'C$. Ma trận $W = [w_{ij}]_n = UV'$ giao hoán với C. Ta chứng minh rằng nó giao hoán với D. Nếu $\lambda_i \neq \lambda_j$ thì bằng cách tính một phần tử của ma trận $CW = WC$ ở hàng i và cột j, ta tìm được $w_{ij} = 0$. Vậy nên biểu diễn ma trận C dưới dạng ma trận kẻ ô chéo với các ô chéo C_1, $C_2, \ldots, C_k$ sao cho trong mỗi ô các phần tử trên đường chéo như nhau, còn trong các ô khác nhau thì chúng khác nhau thì ma trận W là ma trận kẻ ô chéo với các ô chéo W_1, $W_2, \ldots W_k$ cùng cấp với $C_1, C_2, \ldots, C_k$. Theo cách xây dựng ma trận D, nó cũng là ma trận kẻ ô chéo với các ô chéo $D_1, D_2, \ldots, D_k$ cũng có các cấp đó và với các phần tử chéo như nhau trong mỗi ô. Vì $D_iW_i = W_iD_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ nên $DW = WD$. Do đó $DUV' = UV'D$; $U'DU = V'DV$, tức là $B_1 = B_2$.

Cách thứ hai : Dùng các hàm ma trận, có thể chứng minh ngắn hơn. Nếu $A = QB$ là sự biểu diễn dạng đó thì $A'A = B^2$, $B = \sqrt{A'A}$, và các số đặc trưng của B đều dương. Vậy B là giá trị của hàm $\sqrt{\lambda}$ (lấy căn số học), với $\lambda = A'A$

Vì các số đặc trưng của ma trận $A'A$ đều dương nên giá trị đó có nghĩa, xác định duy nhất và xem như một đa thức của ma trận đối xứng $A'A$, sẽ là một ma trận đối xứng. Đặt $Q = AB^{-1}$ ta sẽ thấy Q trực giao như trên.

Sự biểu diễn $A = B_2Q_2$ thu được tương tự nhờ ma trận AA'. Mệnh đề b) chứng minh tương tự như a) thay các dạng xác định dương bởi các dạng Ecmit xác định dương. Mệnh đề c) suy ra từ tính duy nhất của các biểu diễn nói trong câu a) và b). Nó có thể được chứng minh bằng cách đưa ma trận B về dạng chính tắc nhờ phép biến đổi trực giao trong trường hợp 1) và đưa A về dạng chính tắc nhờ phép biến đổi unita trong trường hợp 2). Khi đó từ mệnh đề 1) dễ dàng suy ra sự duy nhất của các biểu diễn nói trong câu a) và b).

262. Nếu cặp dạng F, G tương đương với cặp dạng F_1, G_1 thì từ định nghĩa suy ra $\lambda F_1 - G_1 = U(\lambda F - G)V'$. Theo lý thuyết ma trận, điều đó chứng tỏ các nhân tử bất biến của các λ — ma trận $\lambda F_1 - G_1$ và $\lambda F - G$ trùng nhau.

Đảo lại, giả sử các nhân tử bất biến của các ma trận $\lambda F - G$ và $\lambda F_1 - G_1$ như nhau. Từ các hệ thức

$$F^{-1}(\lambda F - G) = \lambda E - F^{-1}G,$$

$$F_1^{-1}(\lambda F_1 - G_1) = \lambda E - F_1^{-1}G_1$$

suy ra rằng các nhân tử bất biến của các ma trận $\lambda E - F^{-1}G$ và $\lambda E - F_1^{-1}G_1$ cũng như nhau. Vì các ma trận đó là ma trận đặc trưng đối với $F^{-1}G$ và $F_1^{-1}G_1$ nên từ đó

suy ra rằng $F^{-1}G$ và $F_1^{-1}G_1$ đồng dạng, tức là tồn tại một ma trận không suy biến T sao cho

$$F_1^{-1}G_1 = T^{-1}F^{-1}GT.$$

Do đó ta có

$$\lambda E - F_1^{-1}G_1 = T^{-1}(\lambda E - F^{-1}G)T = T^{-1}F^{-1}(\lambda F - G)T,$$

$$\lambda F_1 - G_1 = F_1T^{-1}F^{-1}(\lambda F - G)T.$$

từ đó

$$F_1 = UFV ; G_1 = UGV$$

trong đó

$$U = F_1T^{-1}F^{-1}, V = T.$$

Vậy các cặp F, G và F_1, G_1 tương đương.

263. a) Giả sử các dạng toàn phương đã cho là $F(x)$ và $G(x)$. Vì dạng thứ nhất là xác định dương, nên có thể dùng một phép biến đổi tuyến tính thích hợp để đưa nó về dạng tổng các bình phương của các ẩn. Khi đó ta được cặp dạng

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 ; \quad \sum a_{ij}x_ix_j.$$

Bây giờ ta dùng phép biến đổi *trực giao* thực với ma trận U, nó đưa dạng thứ hai về dạng chính tắc. Đối với các ẩn mới, ma trận của dạng thứ nhất khi đó là

$$UEU' = UU' = E,$$

tức là dạng thứ nhất vẫn giữ là dạng đơn vị, còn dạng thứ hai là dạng chính tắc phải tìm.

Bây giờ giả sử rằng nhờ một phép biến đổi này ta thu được một cặp dạng

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 ; \quad c_1x_1^2 + \dots + c_n x_n^2$$

và nhờ phép biến đổi tuyến tính khác, ta được cặp

$$x_1^2 + \dots + x_n^2,\ d_1x_1^2 + \dots + d_nx_n^2. \quad (2)$$

Khi đó phép biến đổi thích hợp các ẩn với ma trận T sẽ biến cặp (1) thành cặp (2) và do đó các ma trận của các dạng đó sẽ liên hệ với nhau bởi

$$E = TET',\ B = TAT'. \quad (3)$$

trong đó A là ma trận chéo với các phần tử $c_1, \dots, c_n$ còn B là ma trận chéo với các phần tử $d_1, \dots, d_n$ trên đường chéo chính. Hệ thức đầu trong (3) cho $TT' = E$, do đó $B = TAT^{-1}$, tức là các ma trận A, B đồng dạng nhau và do đó các số đặc trưng $c_1, \dots, c_n$ của ma trận A trùng với các số đặc trưng $d_1, \dots, d_n$ của ma trận B.

b) Chứng minh hoàn toàn tương tự câu trên.

264. Chỉ cần chứng minh rằng nếu các cặp dạng đó tương đương thì chúng tương đẳng.

Theo giả thiết, tồn tại các ma trận không suy biến U, V sao cho

$$F_1 = UFV',\quad G_1 = UGV'. \quad (1)$$

Từ đó chuyển vị ta được

$$F_1' = VF'U',\quad G_1' = VG'U'.$$

Vì F và F_1 đối xứng hoặc phản xứng nên ta được

$$F_1 = VFU' \quad (2)$$

và đẳng thức tương tự đối với G_1. So sánh (2) với (1) ta được

$$UFV' = VFU',\ V^{-1}UF = F(V^{-1}U)'. \quad (3)$$

Ký hiệu $V^{-1}U = T$. Đẳng thức thứ hai của (3) cho ta

$$TF = FT',$$
$$T^2F = FT'^2,$$
$$\dots\dots$$
$$T^kF = FT'^k.$$

Từ đó
$(c_0 E + c_1 T + ... + c_k T^k) F = F(c_0 E + c_1 T' + ... + c_k T'^k)$,
trong đó $c_0, c_1, ..., c_k$ là các số tùy ý. Trong lý thuyết ma trận, đã biết rằng các số $c_0, c_1, ..., c_k$ có thể chọn sao cho đa thức:

$$\varphi(T) = c_0 E + c_1 T + ... + c_k T^k$$

là căn bậc hai của T, tức là sao cho $\varphi(T)\,\varphi(T) = T$.

Đặt $P = V \cdot \varphi(T)$, ta có
$PFP' = V \cdot \varphi(T) \cdot F \cdot \varphi(T')\ V' = V\varphi(T)\ \varphi(T)FV' = VTFV' = UFV'$ hoặc $PFP' = F_1$.

Lặp lại lý luận đó đối với ma trận G, ta được

$$PGP' = G_1.$$

Do đó cặp F, G tương đẳng với cặp F_1, G_1.

265. Nếu các nhân tử bất biến của các ma trận $\lambda F - G$ và $\lambda F_1 - G_1$ trùng nhau thì theo một bài đã chứng minh ở trên (bài 262), các cặp F, G và F_1, G_1 tương đương. Nhưng khi đó thì theo bài trên, các cặp đó cũng tương đẳng.

Đảo lại, nếu F, G và F_1, G_1 tương đẳng thì chúng tương đương và do đó các nhân tử bất biến của các ma trận $\lambda F - G$ và $\lambda F_1 - G_1$ trùng nhau.

266. Giả sử các dạng đã cho tương đẳng nhau. Thế thì các ma trận của chúng G và G_1 liên hệ với nhau bởi hệ thức

$$G_1 = UGU'.$$

Từ đó

$$G_1' = UG'U'.$$

Do đó cặp ma trận G, G' tương đẳng với cặp G_1, G_1' và các ước sơ cấp của ma trận $\lambda G - G'$ trùng với các ước sơ cấp của ma trận $\lambda G_1 - G_1'$.

Đảo lại, giả sử các ước sơ cấp của các ma trận $\lambda G - G$ và $\lambda G_1 - G_1'$ trùng nhau. Thế thì dựa trên một bài tập ở trên (bài 262), cặp G, G' tương đương với cặp G_1, G_1', tức l

$$G_1 = UGV', \ G_1' = UG'V'. \qquad (1$$

Đặt

$$G + G' = S, \ G - G' = T, \ G_1 + G_1' = S_1, \ G_1 - G_1' = T_1$$

Từ (1) suy ra

$$S_1 = USV', \ T_1 = UTV',$$

tức là cặp S, T tương đương với cặp S_1, T_1. Vì các ma trận S, S_1 đối xứng, còn các ma trận T, T_1 phản xứng nên theo bài trên các cặp S, T và S_1, T_1 tương đẳng, tức là

$$S_1 = PSP', \ T_1 = PTP'. \qquad (2$$

Nhưng

$$G = \frac{S + T}{2}, \quad G_1 = \frac{S_1 + T_1}{2},$$

vậy từ (2) ta được $G_1 = PGP$, tức là các ma trận G và G_1 tương đẳng.

267. a) $f_1 = -2y_1^2 + \frac{2}{3} y_2^2$;

$$g_1 = y_1^2 + y_2^2 \ ; \ x_1 = y_1 + \frac{\sqrt{3}}{3} y_2 \ ;$$

$$x_2 = \frac{1}{2} y_1 - \frac{\sqrt{3}}{6} y_2.$$

b) $f_1 = y_1^2 + y_2^2$; $g_1 = 4y_1^2 - 2y_2^2$;

$$x_1 = -2\sqrt{2}\, y_1 + 3\sqrt{2}\, y_2$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} y_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} y_2.$$

c) $f_1 = 9y_1^2 + 9y_2^2 - 9y_3^2$; $g_1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$;

$$x_1 = \sqrt{2}\, y_2 ; \quad x_2 = \frac{1}{6} y_1 - \frac{\sqrt{2}}{3} y_2 ;$$

$$x_3 = \frac{2}{3} y_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} y_2 + \frac{\sqrt{2}}{6} y_3 .$$

d) $f_1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 3y_4^2$;

$$g_1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 ;$$

$$x_1 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 ; \quad x_2 = y_2 - y_4 ;$$

$$x_3 = \frac{1}{2} y_1 - \frac{1}{2} y_2 + \frac{1}{2} y_3 - \frac{1}{2} y_4 ;$$

$$x_4 = \frac{1}{2} y_1 - \frac{1}{2} y_2 - \frac{1}{2} y_3 + \frac{1}{2} y_4 .$$

268. a) $f_1 = y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2 - 7y_4^2$;

$$g_1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 ;$$

$$x_1 = \frac{2}{3} y_2 + \frac{2}{3} y_3 + \frac{1}{3} y_4 ;$$

$$x_2 = \frac{2}{3} y_2 - \frac{1}{3} y_3 + \frac{4}{3} y_4 ;$$

$$x_3 = y_3 - 2y_4 ; \quad x_4 = y_1 .$$

b) $f_1 = y_1^2 + 2y_2^2 - 3y_3^2$; $g_1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$;

$$x_1 = y_1 - y_2 ; \quad x_2 = -y_2 + y_3 ; \quad x_3 = -3y_2 + 2y_3$$

269. a) Không được vì các số đặc trưng là $1 \pm \frac{1}{2} i$.

b) Không được vì các nghiệm của λ — phương trình $|F - \lambda G| = 0$ là $\pm \frac{1}{2} i \sqrt{5}$ (các nghiệm này gọi là các số đặc trưng).

270. Đánh số các ẩn một cách thích hợp, ta có

$$c_i d_i = 1 \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

271. a) $3y_1^2 - y_2^2 - 5y_3^2$.

b) $5y_1^2 - y_2^2 - 2y_3^2$

272. a) Hai cặp đó tương đương nhau.

b) Hai cặp đó tương đương nhau.

273. a) $x_1 = -12y_1 - 17y_2$;

$x_2 = 5y_1 + 7y_2$.

b) $x_1 = y_1 + 2y_2$;

$x_2 = 3y_1 + 2y_2$.

274. a) Giả sử $[x]$, $[y]$ là các hàng tọa độ của các vectơ x, y thì hàm song tuyến tính với ma trận A có thể viết dưới dạng ma trận

$$\varphi(x, y) = [x].A[y]'.$$

Bây giờ đổi cơ sở ta được công thức trên cơ sở mới là

$$\varphi(x, y) = [x].A\,[y]' = [x]_1\,T\,.\,A\,.\,T'[y]_1' =$$
$$= [x]_1 A_1 [y]_1',$$

trong đó $[x]_1$, $[y]_1$, A_1 là các hàng tọa độ và ma trận của hàm $\varphi(x, y)$ trên cơ sở mới, và ma trận chuyển cơ sở là T. Từ đó ta được $A_1 = TAT'$.

b) Vì giá trị của một hàm song tuyến tính trong mỗi cơ sở tọa độ nào đó được biểu thị bởi một dạng song tuyến tính mà ma trận của nó trùng với ma trận của hàm

trên cơ sở đó; và theo câu trên, khi chuyển sang cơ sở mới thì dạng toàn phương được thay thế bởi dạng tương đẳng của nó.

c) Đặt

$$\varphi_1(x, y) = \frac{1}{2}[\varphi(x, y) + \varphi(y, x)],$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2}[\varphi(x, y) - \varphi(y, x)]$$

thì $\varphi_1(x, y)$ là hàm song tuyến tính đối xứng và $\varphi_2(x, y)$ là hàm phản xứng và ta có

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x, y).$$

d) Giả sử có hàm toàn phương $\psi(x) = \varphi(x, x)$ thu được bằng cách đồng nhất các biến của hàm song tuyến tính $\varphi(x, y)$. Thế thì $\Psi(x)$ có thể xem như thu được bằng cách đồng nhất các biến của hàm song tuyến tính đối xứng $\varphi(x, y)$ xác định trong câu trên, vì

$$\varphi_1(x, x) = \frac{1}{2}[\varphi(x, x) + \varphi(x, x)] = \varphi(x, x) = \psi(x).$$

Vậy để xét các hàm toàn phương, chỉ cần lấy các hàm song tuyến tính đối xứng. Mặt khác nếu $\varphi(x, y)$ đối xứng và $\Psi(x) = \varphi(x, x)$ thì $\psi(x + y) = \varphi(x + y, x + y) = \varphi(x, x) + 2\varphi(x, y) + \varphi(y, y)$ hoặc $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}[\psi(x + y) - \psi(x) - \psi(y)]$, tức là mỗi hàm toàn phương được suy ra từ một hàm song tuyến tính duy nhất.

e) Tương tự câu trên. Ta chứng minh sự duy nhất. Giả sử $\psi(x)$ là một hàm toàn phương Ecmit. Thế thì ta có $\psi(x + iy) = \varphi(x + iy, x + iy) = \varphi(x, x) + i[\overline{\varphi(x, y)} - \varphi(x, y)] + \varphi(y, y)$.

$\psi(x + y) = \varphi(x, x) + \overline{\varphi(x, y)} + \varphi(x, y) + \varphi(y, y)$.

Từ đó $2\varphi(x, y) = \psi(x + y) + i\psi(x, + iy) - (1 + i)[\psi(x) + \psi(y)]$.

275. a) Thử tiên chuẩn không gian con.

b) Chọn trong $\mathcal{L}$ một cơ sở nào đó. Khi đó các vectơ đẳng hướng bên trái x phải thỏa mãn hệ thức sau đối với mọi $y \in \mathcal{L}$:

$$(x, y) = [x] A [y]' = 0,$$

trong đó A là ma trận Gram của cơ sở đã chọn. Từ đó suy ra: $[x] A = 0$, trong đó 0 là hàng không, tức là các vectơ đẳng hướng bên trái tạo thành hạt nhân của phép biến đổi tuyến tính với ma trận A, và số chiều của hạt nhân của phép biến đổi tuyến tính bằng số khuyết của ma trận của phép biến đổi. Tương tự ta thấy rằng số chiều của không gian con đẳng hướng bên phải bằng số chiều của hạt nhân của phép biến đổi tuyến tính với ma trận chuyển vị A' và do đó trùng với số khuyết của ma trận A.

c) và d) là hệ quả trực tiếp của câu b).

276. Giao của $\mathcal{A}$ và $\mathcal{A}^{\perp}$ là một không gian con đẳng hướng bên phải của $\mathcal{A}$. Vì $\mathcal{A}$ không suy biến nên $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^{\perp} = 0$, do đó tổng $\mathcal{A} + \mathcal{A}^{\perp}$ là tổng trực tiếp.

Bây giờ giả sử c là một vectơ bất kỳ thuộc $\mathcal{L}$.

Ký hiệu $(a_j, c) = \gamma_j$ $(j = 1, \ldots, m)$, trong đó $a_1, \ldots, a_m$ là một cơ sở nào đó của $\mathcal{A}$. Hệ phương trình phụ.

$(a_j, a_1) x_1 + (a_j a_2) x_2 + \ldots + (a_j, a_m) x_m = (j = 1, \ldots, m$

giải được đối với $x_1, \ldots, x_m$ vì định thức của nó là định thức của ma trận Gram của hệ $a_1, \ldots, a_m$, định thức này khác không do tính chất không suy biến của $\mathcal{A}$. Vectơ $a = x_1 a_1 + \ldots + x_m a_m$ thuộc $\mathcal{A}$, ngoài ra $(a_j, c - a) =$ $(j = 1, \ldots, m)$, tức là $c - a \in \mathcal{A}^{\perp}$. Vì với mọi c đều có.

$$c = a + (c - a) \quad (a \in \mathcal{A}, \; c - a \in \mathcal{A}^{\perp})$$

nên $\mathcal{L}$ là tổng trực tiếp của $\mathcal{A}$ và $\mathcal{A}^{\perp}$.

277. Ắt có : Vì các ma trận Gram của tất cả các cơ sở ủa một không gian đã cho đều tương đẳng và các ma ận Gram của các cơ sở tương ứng của các không gian ẳng cấu thì như nhau.

Đủ : Nếu A, B là các ma trận Gram của các cơ sở của c không gian $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_1$ và A tương đẳng với B thì dựa ên các kết quả của bài 274 suy ra rằng trong $\mathcal{L}$ tìm ợc một cơ sở với ma trận là B.

278. a) Ma trận Gram A của một cơ sở tùy ý của không gian giả Ơclit là một ma trận đối xứng thực. Theo một bài tập ở chương này, ma trận A tương đẳng với một ma trận chéo với các số $+1$ và -1 trên đường chéo chính. Nói khác đi trong mỗi không gian Ơclit n chiều, tồn tại một cơ sở sao cho trên đó tích vô hướng các vectơ với tọa độ $x_1, \ldots, x_n$ và $y_1, \ldots, y_n$ được biểu thị bởi dạng.

$$(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_s y_s - x_{s+1} y_{s+1} - \ldots - x_n y_n.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. Hơn nữa với bất kỳ $n > 0$ và bất kỳ s $(0 \leqslant s \leqslant n)$, tồn tại một không gian giả Ơclit n chiều và có ký số là $s - (n - s)$.

b) Ma trận Gram của một cơ sở nào đó của một không gian đơn hình là một ma trận phản xứng, vì thế theo lý thuyết ma trận nó tương đẳng với một ma trận kẽ ô chéo với các ô có dạng $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ trên đường chéo chính. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

c) Vì mọi dạng song tuyến tính phức đối xứng không suy biến đều đưa được về dạng với ma trận đơn vị nên từ đó suy ra điều phải chứng minh.

d) Tương tự lý luận ở các câu trên đối với ma trận phức phản xứng không suy biến.

279. a) Điều kiện $f(x) = (x, a)$ tương đương với hệ thống hệ thức

$$(a_j, a) = f(a_j), \quad j = 1, \dots, n \qquad (1)$$

trong đó $a_1, \dots, a_n$ là một cơ sở nào đó của $\mathcal{L}$.

Đặt $a = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$ và xem (1) như một hệ phương trình đối với $x_1, \dots, x_n$ ta thấy đó là một hệ n, phương trình tuyến tính của n ẩn mà định thức của nó khác không vì nó là định thức của ma trận của dạng cơ bản trong cơ sở đã chọn. Do đó các phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

b) Phép biến đổi liên hợp bên phải $\mathcal{A}^*$ được xác định bởi

$$(x\mathcal{A}, a) = (x, a\mathcal{A}^*) \qquad (2)$$

đối với mỗi $a \in \mathcal{L}$. Phép biến đổi $\mathcal{A}^*$ được xác định duy nhất. Thật vậy, nếu đối với một phép biến đổi tuyến tính $\mathcal{B}$ bất kỳ và với mọi $a, x \in \mathcal{L}$ ta có $(x\mathcal{A}, a) = (x, a\mathcal{B})$ thì bằng cách so sánh đẳng thức này với (2) ta được $(x, a\mathcal{A}^* - a\mathcal{B}) = 0$, do đó $a\mathcal{A}^* - a\mathcal{B}$ là vectơ đẳng hướng của không gian $\mathcal{L}$. Vì không gian $\mathcal{L}$ không chứa các vectơ đẳng hướng khác không, nên $a\mathcal{A}^* - a\mathcal{B} = 0$ và $\mathcal{A}^* = \mathcal{B}$.

c) Thử trực tiếp bằng cách dùng định nghĩa.

d) Chọn trong $\mathcal{L}$ một cơ sở nào đó và ký hiệu ma trận của các phép biến đổi $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^*$ lần lượt là A, B. Giả sử $\mathcal{L}$ là không gian thường. Ta có.

$$(x\mathcal{A}, a) = [x\mathcal{A}]\, G\, [a]' = [x]\, AG\, [a]',$$

$$(x, a\mathcal{A}^*) = [x]\, G\, [a\mathcal{A}^*]' = [x]\, G\, B'\, [a]',$$

trong đó G là ma trận Gram của không gian (dựa trên công thức $\varphi(x, y) = [x]\, A\, [y]'$ đã biết). Do đó.

$$AG = GB' \text{ hoặc } B' = G^{-1} AG.$$

Nếu $\mathcal{L}$ là không gian (mêtric song tuyến tính) Ecmit thì ta có các hệ thức

$$AG = G\overline{B}' \text{ hoặc } \overline{B}' = G^{-1}AG.$$

280. a) Vì với mọi $x, y \in \mathcal{L}$ ta có

$$(x\mathcal{A}^*, y) = \pm (y, x\mathcal{A}^*) = \pm (y\mathcal{A}, x) = (x, y\mathcal{A}) =$$
$$= (x^*\mathcal{A}, y),$$

do đó $\mathcal{A}^* = {}^*\mathcal{A}$.

b) Giả sử trái lại, $(x\mathcal{A}, y) = (x\mathcal{B}, y)$ với mọi $x, y \in \mathcal{L}$. Khi đó $(x\mathcal{A} - x\mathcal{B}, y) = 0$ với mọi y, tức là $x\mathcal{A} - x\mathcal{B}$ là là một vectơ đẳng hướng. Vì $\mathcal{L}$ không suy biến nên nó không chứa các vectơ đẳng hướng khác không, do đó $x\mathcal{A} = x\mathcal{B}$ với mọi $x \in \mathcal{L}$, do đó $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

c) Với mỗi giá trị đã cho của y thì $f(x, y)$ là một hàm tuyến tính của x. Theo câu a) bài trên, điều đó chứng tỏ rằng đối với mỗi y, tìm được một vectơ z xác định duy nhất sao cho hệ thức $f(x, y) = (x, z)$ xảy ra với mọi giá trị của x. Ký hiệu $\mathcal{B}$ là phép biến đổi biến y thành z, thế thì

$$f(x, y) = (x, y\mathcal{B}). \qquad (*)$$

Trong trường hợp không gian mêtric song tuyến tính Ecmit ta có

$$f(x, cy_1 + dy_2) = \overline{c}f(x, y_1) + \overline{d}f(x, y_2) =$$
$$= \overline{c}(x, y_1\mathcal{B}) + \overline{d}(x, y_2\mathcal{B}) =$$
$$= (x, c(y_1\mathcal{B}) + d(y_2\mathcal{B})).$$

Mặt khác, từ $(*)$ ta có

$$f(x, cy_1 + dy_2) = (x, (cy_1 + dy_2)\mathcal{B})$$

tức là $\mathcal{B}$ là phép biến đổi tuyến tính. Điều đó cũng đúng đối với các không gian mêtric song tuyến tính thường. Ký hiệu $\mathcal{A}$ là phép biến đổi liên hợp bên trái của $\mathcal{B}$, ta có thể viết $(*)$ dưới dạng $f(x, y) = (x\mathcal{A}, y)$ là điều phải chứng minh.

231. Phép biến đổi $\mathcal{A}$ là đối xứng nếu với mọi $x, y \in \mathcal{L}$ ta có

$$(x\mathcal{A}, y) = (x, y\mathcal{A})$$

hoặc tương đương với điều đó là

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^* = {}^*\mathcal{A}.$$

Phép biến đổi $\mathcal{A}$ là phản xứng nếu với mọi $x, y \in \mathcal{L}$ ta có

$$(x\mathcal{A}, y) = -(x, y\mathcal{A})$$

hoặc

$$\mathcal{A} = -\mathcal{A}^* = -{}^*\mathcal{A}.$$

a) Giả sử $\mathcal{L}$ có mêtric đối xứng, và $\mathcal{A}$ là một phép biến đổi đối xứng của $\mathcal{L}$. Hàm song tuyến tính ứng với phép biến đổi $\mathcal{A}$ có dạng (theo bài trên).

$$f(x, y) = (x\mathcal{A}, y).$$

Nếu $\mathcal{L}$ là không gian thường thì

$$f(x, y) = (x\mathcal{A}, y) = (y, x\mathcal{A}) = (y\mathcal{A}, x) = f(y, x).$$

Nếu là không gian Ecmit thì

$$f(x, y) = (x\mathcal{A}, y) = \overline{(y, x\mathcal{A})} = \overline{(y\mathcal{A}, x)} = \overline{f(y, x)}.$$

Vậy trong cả hai trường hợp, $f(x, y)$ là hàm đối xứng Lý luận đó cũng chứng tỏ rằng từ tính đối xứng của hàm $f(x, y)$ suy ra tính đối xứng của phép biến đổi $\mathcal{A}$. Tương tự, tính phản xứng của phép biến đổi $\mathcal{A}$ tương đương với tính phản xứng của hàm $f(x, y)$ tương ứng.

b) Giả sử $\mathcal{L}$ có mêtric phản xứng. Nếu $\mathcal{A}$ là phép biến đổi đối xứng của không gian mêtric song tuyến tính thường thì

$$f(x, y) = (x\mathcal{A}, y) = -(y, x\mathcal{A}) = -(y\mathcal{A}, x) = \\ = -f(y, x).$$

Các mệnh đề còn lại chứng minh tương tự như ở câu trên.

CHƯƠNG VI

NỬA NHÓM

282. a) Rõ ràng nếu $m = 1$ và n, p tùy ý thuộc N, hoặc $p = 1$ và m, n tùy ý thuộc N, hoặc $n = p = 2$ và m tùy ý thuộc N thì ta có

$$m \circ (n \circ p) = (m \circ n) \circ p.$$

Bây giờ giả sử $m \neq 1, p \neq 1$. Thế thì đẳng thức

$$m^{np} = m^{n^p}$$

kéo theo $np = n^p$ hay $p = n^{p-1}$.

Đẳng thức cuối chỉ xảy ra khi $n = p = 2$.

b) Đẳng thức $m^n = n^m$ với m, n là các số nguyên dương xảy ra khi và chỉ khi hoặc $m = n$, hoặc $m = 2$, $n = 4$ hay ngược lại.

283. Giả sử phần tử đơn vị trong A được ký hiệu bởi e.

a) Nếu $A = \{e, a\}$ thì trên A có một phép toán cho bởi bảng

		a
e	e	a
a	a	e

Nếu $A = \{e, a, b\}$ thì trên A có một phép toán cho bởi bảng

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Nếu $A = \{e, a, b, c\}$ thì trên A có hai phép toán $(*)$ và $(\circ)$ cho bởi hai bảng :

$(*)$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

$(\circ)$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Tất cả các phép toán đó đều có tính chất kết hợp và giao hoán và các nửa nhóm thành lập được đều là những nhóm giao hoán.

Nếu $A = \{e, a, b, c, d\}$ thì trên A có 5 phép toán $(.)$, $(*)$, $(\circ)$, $(+)$, $(\times)$ cho bởi các bảng :

$(.)$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	b	c	d	e
b	b	c	d	e	a
c	c	d	e	a	b
d	d	e	a	b	c

$(*)$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	b	e	d	c
b	b	d	c	a	e
c	c	e	d	b	a
d	d	c	a	e	b

$(\circ)$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	b	e	d	c
b	b	d	c	e	a
c	c	e	d	a	b
d	d	c	a	b	e

$(+)$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	e	c	d	b
b	b	c	d	e	a
c	c	d	a	b	e
d	d	b	e	a	c

$(\times)$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	e	c	d	b
b	b	d	e	a	c
c	c	b	d	e	a
d	d	c	a	b	e

Chú ý : 1) Tính chất giản ước được cho mỗi phần tử bảo đảm các phần tử trên mỗi dòng và mỗi cột của bảng phải khác nhau.

2) Vì vai trò của các phần tử khác a là như nhau nên nếu đổi chỗ chúng cho nhau ta sẽ được những phép toán trùng với những phép toán đã nêu (được các cấu trúc đẳng cấu).

b) Trong trường hợp $n = 5$ chỉ có phép toán (.) có tính kết hợp, còn các phép toán còn lại đều không kết hợp.

284. a) $\gamma_a : A \to A$ là một đơn ánh có nghĩa là từ $a * x = a * y$ suy ra $x = y$. Nếu tồn tại $u \in A$ mà $a * u = a$ thì với mọi $x \in A$ ta có

$$(a * u) * x = a * x.$$

Vì phép toán (*) có tính kết hợp nên ta có

$$a * (u * x) = a * x.$$

Theo chú ý trên, ta suy ra $u * x = x$, với mọi $x \in A$, nghĩa là u là phần tử đơn vị trái đối với phép toán (*).

Nếu tồn tại $v \in A$ là $a * v = a$ thì từ $a * b = v$ ta suy ra

$$(a * b) * a = v * a = v * (a * v).$$

Nhân bên trái với a ta được

$$a * (a * b) * a = a * (v * (a * v)).$$

và do tính kết hợp

$$a * (a * (b * a)) = (a * v) * (a * v) = a * (a * v).$$

Vì γ_a là đơn ánh nên từ đẳng thức này suy ra

$a * (b * a) = a * v$ và từ đó lại suy ra $b * a = v$.

b) Vì γ_a là một toàn ánh nên với mọi $x \in A$ tồn tại $y \in A$ để $a * y = x$. Từ đó

$$u * (a * y) = (u * a) * y = u * x = a * y = x.$$

Vậy $u \circ x = x$ với mọi $x \in A$.

c) Với mọi $u \in A$ ta có

$$\gamma_x\delta_y(u) = x \circ (u \circ y),$$
$$\delta_y\gamma_x(u) = (x \circ u) \circ y$$

Từ đó suy ra kết luận phải chứng minh.

235. a) Với mọi $u \in A$ ta có

$$(\delta \cdot \delta_x)(u) = \delta(ux) = u\delta(x) = \delta_{\delta(x)}(u).$$

Tương tự,

$$(\gamma \cdot \gamma_x)(u) = \gamma(xu) = \gamma(x)u = \gamma_{\gamma(x)}(u).$$

b) Nếu $\gamma : A \to A$ là một phép chuyển dịch trái thì rõ ràng $\gamma\delta_y = \delta_y\gamma$ (1) với mọi $y \in A$. Đảo lại, giả sử có điều kiện (1). Thế thì với mọi $a, x \in A$ ta có

$$\gamma(ax) = \gamma(\delta_x(a)) = (\gamma\delta_x)(a) = (\delta_x\gamma)(a) = \gamma(a) \cdot x,$$

nghĩa là γ là một phép chuyển dịch trái.

c) Ta có $(ax)y = a(xy)$ khi và chỉ khi

$$\delta_y(ax) = a\delta_y(x).$$

236. Giả sử S chứa một đơn vị trái e và một đơn vị phải f. Thế thì $ef = e = f$ và do đó e là phần tử đơn vị duy nhất của S.

237. a) Với $a, b, c \in [0, 1]$ ta có

$$(a \circ b) \circ c = (a + b - ab) \circ c =$$
$$= a + b - ab + c - ac - bc + abc$$

$$a \circ (b \circ c) = a \circ (b + c - bc) =$$
$$= a + b + c - bc - ab - ac + abc.$$

Vậy $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.

Rõ ràng với $a, b \in [0, 1]$ thì $a \circ b \in [0, 1]$ vì
$a \circ b = a + b - ab = a + b(1 - a) \leqslant a + (1 - a) = 1$

c) Nếu $a \leqslant b$ thì với mọi $c \in [0, 1]$ ta có

$$(b \circ c) - (a \circ c) = (b - a) - c(b - a) \geqslant 0.$$

288. a) Rõ ràng với $a, b \in [0, 1]$ thì $a * b \in [0, 1]$, và dễ thấy phép toán đó có tính kết hợp.

Phần tử đơn vị là 1.

b) Ta có

$$(c * b) - (c * a) = \frac{(b - a) - c^2(b - a)}{(1 + cb)(1 + ca)} \geqslant 0.$$

289. a) Đơn vị là cặp (0, 0).

b) $(x_1, y_1)^{-1} = (-x_1, -e^{-x_1} y_1)$.

c) Suy từ định nghĩa phép toán (*).

290. a) Dễ thấy rằng

$$(a * b) * c = \min(a + b + c, 1) = a * (b * c).$$

Phần tử đơn vị đối với phép toán (*) là số 0.

b) Nếu $a \neq 0$ thì với mọi $b \in [0, 1]$ ta có

$$a * b = \min(a + b, 1) \geqslant a.$$

do đó ngoài số 0, không có phần tử nào có nghịch đảo đối với phép toán (*).

291. a) Điều kiện đủ: Phương trình $ax = b$ có một nghiệm là $x = a \circ b$, còn phương trình $ya = b$ có một nghiệm là $y = b * a$. Ta chứng minh các nghiệm đó là duy nhất. Giả sử có $c, d \in P$ sao cho

$$ac = ad = b.$$

Thế thì

$$c = a \circ (ac) = a \circ (ad) = d.$$

Điều kiện ắt có. Giả sử mỗi phương trình

$$ax = b \text{ và } ya = b$$

có một nghiệm duy nhất $x = c$, $y = d$.

Thế thì ta định nghĩa hai phép toán (o) và (∗) trên P như sau:

$$a \circ b = c \text{ và } (b * a) = d.$$

Rõ ràng $a(a \circ b) = b$ và $(b * a)a = b$. Ta chứng minh $a \circ (ab) = b$. Giả sử $a \circ (ab) = u$. Thế thì $a(a \circ (ab)) = au$. Theo định nghĩa của phép toán (o) ở trên ta có

$$a(a \circ (ab)) = ab.$$

Do đó $ab = au$ và do tính duy nhất của nghiệm phương trình, ta được $b = u$.

Đồng nhất thức $(ba) * a = b$ cũng chứng minh tương tự.

b) Vì mỗi dòng và mỗi cột của bảng là một hoán vị của tập $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ nên các phương trình $ax = b$ và $ya = b$ có nghiệm duy nhất.

292. a) Nếu tựa nhóm P có đơn vị trái f thì rõ ràng nó có hạt nhân trái $N_1 \neq \phi$ vì $f \in N_1$. Đảo lại giả sử P có hạt nhân trái $N_1 \neq \phi$ và giả sử $a \in N_1$.

Phương trình $ax = a$ có nghiệm duy nhất $x = e_a$. Với mọi $b \in P$, giả sử $e_a b = b'$. Thế thì

$$ab' = a(e_a b) = (ae_a)b = ab$$

do đó $b' = b$. Vậy e_a là đơn vị trái của P.

b) Giả sử P có hạt nhân trái $N_1 \neq \phi$. Theo câu a) P có đơn vị trái $e \in N_1$. Với mọi $a, b \in N_1$ ta có

$$(ab)(xy) = a[b(xy)] = a[(bx)y] = [a(bx)]y = [(ab)x]y$$

Vậy $ab \in N_1$ và N_1 khép kín đối với phép toán trong P.

Ta chứng minh e cũng là đơn vị phải của N_1. Với $a, x \in N_1$

$$(ae)x = a(ex) = ax \text{ do đó } ae = a.$$

Phương trình $ax = e$, với $a \in N_1$, có một nghiệm $x = a'$. Ta chứng minh $a' \in N_1$ (và là nghịch đảo bên phải của a đối với đơn vị phải e).

Thật vậy với mọi $x, y \in P$, tồn tại $y' \in P$ sao cho

$$a'(xy) = (a'x)y'.$$

Nhân bên trái với a:

$$a[a'(xy)] = a[(a'x)y'],$$

do đó vì $a \in N_1$ nên ta có

$$(aa')(xy) = [a(a'x)]y',$$
$$e(xy) = [(aa')x]y',$$
$$xy = xy'.$$

Vậy $y = y'$ và $a'(xy) = (a'x)y$ hay $a' \in N_1$.

293. a) Suy ra từ điều kiện (i).

b) Ta lập một ánh xạ $\varphi : L^1 \to L^2$ như sau. Cố định một đường thẳng $l_3 \in L^3$ và đặt tương ứng $l_1 \in L^1$ với $l_2 \in L^2$ nếu l_1 và l_2 cắt nhau tại điểm nằm trên l_3. Rõ ràng φ là một song ánh do hai điều kiện (i) và (ii).

c) Phương trình $ax = b$ có nghiệm duy nhất là phần tử $c \in P$ mà đường thẳng duy nhất $l^2_c \in L^2$ đi qua giao điểm của 2 đường thẳng $l^1_a \in L^1$ và $l^3_b \in L^3$.

d) Cho một tựa nhóm P. Ta xây dựng lưới sau đây nhận P làm tựa nhóm tọa độ. Tập điểm Q là tập các cặp (a, b), $a, b \in P$, còn L^i, $i = 1, 2, 3$ là tập các ký hiệu l^i_a với mọi $a \in P$. Điểm (a, b) được coi là nằm trên các đường thẳng $l^1_a \in L^1$, $l^2_b \in L^2$ và $l^3_{ab} \in L^3$. Do đó điều kiện (i) thỏa mãn. Điều kiện (ii) cũng thỏa mãn vì các đường thẳng l^1_a và l^2_b cắt nhau tại điểm (a, b), các đường thẳng l^1_a và l^3_c cắt nhau tại điểm (a, d) mà $ad = c$, còn các đường thẳng l^2_b và l^3_c cắt nhau tại điểm (e, b) mà $eb = c$.

Rõ ràng P là tựa nhóm tọa độ của lưới đó.

294. a) Giả sử $x, y \in P$ và $yx = z$. Thế thì

$$(yx)x = zx,$$

do đó ta được $y = zx$. Nhân bên trái với z, ta được

$$zy = z(zx) = x,$$

từ đó ta lại có $z = xy$. Vậy $xy = yx$.

b) Nếu với mọi $x, y \in P$ ta có $xy = x/y = y/x$ thì

$$(xy)y = (xy)/y = x,$$
$$y(yx) = y\backslash(yx) = x.$$

Vậy P là một tựa nhóm đối xứng. Đảo lại nếu P là một tựa nhóm đối xứng và nếu đặt $x/y = u$, $y\backslash x = v$ thì ta có $x = uy$, $x = yv$. Do đó $u = xy$, $v = yx$, nên theo câu a) P giao hoán, ta có $u = v$, tức là $xy = x/y = y\backslash x$.

295. a) Vì chẳng hạn

$$(aS)(aS) = a(SaS) \subset aS,$$
$$(SaS)(SaS) = Sa(SSaS) \subset SaS.$$

b) Nếu $BA \subset AB$ thì

$$(AB)(AB) = A(BA)B \subset A(AB)B = (AA)(BB) \subset AB.$$

296. a) Phần tử đơn vị là số 0.

b) Phần tử lũy đẳng là số 2.

297. a) Phần tử đơn vị là tập rỗng

b) Phần tử lũy đẳng là A.

298. b) Giả sử S là một nửa nhóm lũy đẳng giao hoán. Với mỗi $a \in S$ ta ký hiệu

$$X_a = \{b \in S \mid \text{tồn tại } x \in S \text{ để } ax = b\}.$$

Do tính chất giao hoán của phép nhân trong S nên ta có $X_{ab} = \{x \in S \mid \text{tồn tại } x \in S \text{ để } abx = c\} \subset X_a \cap X_b$. Mặt khác nếu $d \in X_a \cap X_b$ thì tồn tại $x, y \in S$ sao cho $ax = d$ và $by = d$. Vì S giao hoán và lũy đẳng nên đẳng thức $ax = by$ kéo theo

$$abx = by = d,$$

do đó $d \in X_{ab}$. Vậy $X_{ab} = X_a \cap X_b$.

Ánh xạ $a \mapsto X_a$ là một đơn cấu từ S tới $\mathcal{P}(S)$.

c) Rõ ràng $x \leqslant x$, $x \leqslant y$ và $y \leqslant x$ kéo theo $x = y$. Giả sử $x \leqslant y$ và $y \leqslant z$. Thế thì $xy = y$ và $yz = z$. Từ đó

$$xz = xyz = yz = z. \text{ Vậy } x \leqslant z.$$

Rõ ràng $x(xy) = xy$ và $y(xy) = xy^2 = xy$.

299. b) Giả sử $\varphi^2 = \varphi$ và $y \in \varphi(X)$. Thế thì tồn tại $x \in X$ sao cho $\varphi(x) = y$, do đó $\varphi(y) = \varphi^2(x) = \varphi(x) = y$. Đảo lại giả sử với mọi $y \in \varphi(X)$ ta có $\varphi(y) = y$. Thế thì với $x \in X$ nếu $\varphi(x) = y$, ta có

$$\varphi^2(x) = \varphi(\varphi(x)) = \varphi(y) = y = \varphi(x),$$

tức là $\varphi^2 = \varphi$.

300. b) Nếu tồn tại $a \in X$ sao cho $\varphi(x) = a$ với mọi $x \in X$ thì với mọi $\psi \in \mathcal{T}_X$ ta có

$$\varphi\psi(x) = \varphi[\psi(x)] = a = \varphi(x).$$

Đảo lại, nếu tồn tại $x_1, x_2 \in X$ sao cho $\varphi(x_1) = a$, $\varphi(x_2) = b$ và $a \neq b$ thì ta lập ánh xạ $\psi : X \to X$ mà $\psi(x_1) = x_2$. Thế thì

$$\varphi\psi(x_1) = \varphi(x_2) = b \neq a = \varphi(x_1),$$

do đó $\varphi\psi \neq \varphi$, và φ không phải là phần tử không bên trái trong $\mathcal{T}_X$.

c) Giả sử $|X| > 1$ và $\psi \in \mathcal{T}_X$ tùy ý. Giả sử với $x \in X$ ta có $\psi(x) = a \in X$. Thế thì tồn tại $b \in X$, $b \neq a$, do đó ta có thể lập ánh xạ $\varphi : X \to X$ mà $\varphi(a) = b$. Lúc đó ta có

$$(\varphi\psi)(x) = \varphi(a) = b \neq a = \psi(x).$$

Vậy ψ không phải là phần tử không bên phải trong $\mathcal{T}_X$.

301. a) Giả sử $u \in S$, $u^2 = u$ và $x \in S$. Nếu $ux = y$ thì ta có

$$u^2x = ux = uy,$$

do đó $y = x$. Vậy u là đơn vị trái của S.

b) Giả sử u và v là hai lũy đẳng của S và $x \in Su \cap Sv$. Thế thì
$$x = au = bv.$$
Theo câu a) u là một đơn vị trái của S, nên nếu nhân bên phải đẳng thức đó với v ta được
$$auv = av = bv^2 = bv.$$
Vậy $au = av$, do đó $u = v$.

302. a) Nếu tồn tại hai số r, s sao cho $0 < r < s$ và $a^r = a^s$ thì
$$|\langle a \rangle| \leqslant s.$$
b) Giả sử $|\langle a \rangle| = n$. Thế thì
$$\langle a \rangle = \{a, a^2, ..., a^n\},$$
do đó $a^{n+1} = a^r$ với r nào đó $\leqslant n$. Đặt $m = n + 1 - r$, ta có kết luận phải chứng minh.

c) Tập $K_a = \{a^r, a^{r+1}, ..., a^{r+m-1}\}$ rõ ràng là một nửa nhóm con của nửa nhóm xiclic $\langle a \rangle = \{a, a^2, ..., a^{r+m-1}\}$. Giả sử Z_m là nhóm cộng các số nguyên đồng dư mod n. Lập ánh xạ $\varphi : K_a \to Z_m$ như sau: với $r \leqslant p \leqslant r + m - 1$, ta đặt $\varphi(a^p) = \overline{p}$, trong đó $\overline{p}$ là lớp đồng dư theo mod m chứa p. Dễ thấy rằng φ là một đẳng cấu và K_a là một nhóm xiclic.

303. a) Tính kết hợp của phép toán nhân suy ra từ định nghĩa.

b) Nếu xem mỗi phần tử $x \in X$ đồng nhất với dãy $(x) \in F_X$ chỉ chứa một phần tử x thì theo định nghĩa của phép nhân trong F_X ta có
$$(x_1, ..., x_m) = (x_1) ... (x_m) = x_1 ... x_m.$$
Vì vậy nếu φ là một đồng cấu từ F_X tới S trùng với φ_o trên X thì với mọi $x_1, ..., x_m \in X$ ta có
$$\varphi(x_1, ..., x_m) = \varphi(x_1 ... x_m) = \varphi_o(x_1) ... \varphi_o(x_m).$$
Do đó tồn tại không quá một đồng cấu φ như vậy.

Mặt khác đẳng thức cuối có thể dùng để xác định một đồng cấu $\varphi : F_X \to S$ và rõ ràng φ trùng với φ_0 trên X.

304. a) $a \circ (b \circ c) = |a|(b \circ c) = |a||b|c$,

$$(a \circ b) \circ c = (|a|b) \circ c = ||a|b|c =$$

$$= |a||b|c.$$

Vậy $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.

b) Các phần tử lũy đẳng chính là những số phức có môđun bằng 1.

c) Nghiệm của phương trình $a \circ x = b$ là $x = |a|^{-1}b$.

305. a) Đơn vị là phần tử $(0, 0)$.

b) Ta có

$$(i, j)(k, m) = (i + k, 2^k j + m),$$

$$(k, l)(i, n) = (k + i, 2^i l + n).$$

Vì vậy nếu lấy $n = m + 2^k j - 2^i l$ thì ta có

$$(i, j)(k, m) = (k, l)(i, n) \in \alpha S \cap \beta S.$$

c) Ta có

$$(m, n)(i, j) = (m + i, 2^i n + j),$$

$$(s, t)(k, l) = (s + k, 2^k t + l).$$

Do đó nếu lấy j chẵn và l lẻ thì

$$(m, n)(i, j) \neq (s, t)(k, l)$$

với mọi (m, n) và (s, t), nghĩa là $S\alpha \cap S\beta = \varnothing$.

306. b) Đối với mỗi hàm $\varphi \in F^*$ tồn tại một tập con $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset X$ sao cho $\varphi(x_i) = n_i \neq 0$, $n_i \in N^*$, $i = 1, 2, \ldots, k$ và $\varphi(x) = 0$ với mọi $x \in X \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}$. Thế thì φ biểu diễn được dưới dạng

$$\varphi = n_1 \varphi_{x_1} + \ldots + n_k \varphi_{x_k} \qquad (1)$$

trong đó $n_i \varphi_{x_i} = \underbrace{\varphi_{x_i} + \dots + \varphi_{x_i}}_{n_i \text{ lần}}$

Bây giờ ta lập ánh xạ $g^* : F^* \to S$ như sau. Nếu $\varphi \in F^*$ biểu diễn được dưới dạng (1) thì ta đặt

$$g^*(\varphi) = n_1 g(x_1) + \dots + n_k g(x_k).$$

Rõ ràng g^* là một đồng cấu, g^* trùng với g trên X, và $g^* : F^* \to S$ là đồng cấu duy nhất có tính chất đó.

307. a) Nếu $aS \neq S$ thì aS là một iđêan phải thực sự của S. Mặt khác nếu A là một iđêan phải thực sự của S (tức $A \neq S$) và nếu $a \in A$ thì $aS \subset A \neq S$, tức là $aS \neq S$.

b) Giả sử e là một phần tử lũy đẳng của nửa nhóm đơn phải S. Theo câu a) ta có $eS = S$. Do đó với mọi $a \in S$ tồn tại $b \in S$ sao cho $eb = a$. Thế thì $ea = e^2 b = eb = a$. Vậy e là đơn vị trái của S.

308. a) Giả sử $xy = y$. Vì S đơn phải nên theo bài trên $yS = S$. Do đó tồn tại $z \in S$ sao cho $yz = x$. Từ đó ta có

$$x^2 = x(yz) = (xy)z = yz = x,$$

tức là x là một lũy đẳng, trái giả thiết.

b) Giả sử $s \in S$. Ta xác định ánh xạ φ từ S tới S như sau. Vì S đơn phải nên với mỗi $x \in S$ tồn tại $x' \in S$ sao cho $xx' = s$. Thế thì ta đặt $\varphi(x) = x'$. Ta có φ là một đơn ánh vì nếu $\varphi(x) = \varphi(y)$ thì $x \cdot \varphi(x) = s = y \cdot \varphi(y) = y \cdot \varphi(x)$, do đó giản ước cho $\varphi(x)$ ta được $x = y$.

Vậy $|S| = |\varphi(S)|$. Mặt khác $\varphi(S) \cap Ss = \varphi$, vì nếu $z \in \varphi(S) \cap Ss$ thì $z = \varphi(x) = ys$, với x, y nào đó thuộc S, do đó

$$s = x \cdot \varphi(x) = xys,$$

mà theo câu a) điều đó không xảy ra.

Vậy $\varphi(S) \subset S \setminus Ss$, do đó $|S| = |\varphi(S)| \leqslant |S \setminus Ss| \leqslant |S|$, tức là $|S \setminus Ss| = |S|$.

309. a) Rõ ràng S là một nửa nhóm. Giả sử I là một iđean của S và $I \neq S$. Giả sử $(a, b) \in I$. Với mọi $(x, y) \in S$ tồn tại (u, v) và $(s, t) \in S$ sao cho

$$(x, y) = (u, v)(a, b)(s, t)$$

Thật vậy nếu lấy số thực $v > 0$ tùy ý, lấy $0 < s < \frac{y}{va + b}$ và lấy $u = xa^{-1}s^{-1}$, $t = y - (va + b)s$, thì ta có

$$(u, v)(a, b)(s, t) = (ua, va + b)(s, t) =$$
$$= (uas, (va + b)s + t) = (x, y).$$

Vì $(a, b) \in I$ nên $(x, y) \in I$, tức là $I = S$.

b) Ta có

$$(x, y)(x, y) = (x^2, yx + y) = (x^2, y(x + 1)) \neq (x, y)$$

vì $y(x + 1) \neq y$ với mọi $x > 0$.

Vậy S không chứa lũy đẳng.

c) Rõ ràng B là một nửa nhóm con của S. Lập ánh xạ φ từ B tới nửa nhóm cộng các số thực dương bằng cách đặt tương ứng cặp $(1, b)$ với số thực dương b, thì φ là một đẳng cấu.

310. a) Giả sử $a \in K$. Thế thì với mọi $x \in S$, ta có $xa = a \in K$ và $ax \in K$ vì $y(ax) = (ya)x = ax$ với mọi $y \in S$.

Vậy K là một iđean hai phía của S.

b) Giả sử I là một iđean phải tùy ý của nửa nhóm S, $x \in I$, $a \in K$. Thế thì $xa = a \in I$. Vậy $K \subset I$.

311. a) Giả sử $x \in \bigcup_{i \in I} T_i$. Thế thì $x \in T_i$ đối với $i \in I$ nào đó. Nếu T_i là các iđean phải của S thì $xy \in T_i$ với mọi $y \in S$, do đó $xy \in \bigcup_{i \in I} T_i$. Vậy $\bigcup_{i \in I} T_i$ là một iđean phải của S. Trường hợp T_i là các iđean trái hay iđean hai phía chứng minh tương tự.

b) Giả sử $z \in V = \bigcap_{i \in I} T_i$. Thế thì $z \in T_i$ với mỗi $i \in I$, do đó $zy \in T_i$ với mỗi idean phải T_i. Vậy $zy \in V$.

312. a) Nếu $a = b$ thì hiển nhiên $ac = bc$, $ca = cb$ với mọi $c \in S$. Nếu $a, b \in I$ và I là một idean hai phía của S thì $ca, cb \in I$ và $ac, bc \in I$ với mọi $c \in S$.

b) Suy ra từ định nghĩa của tương đẳng Rixơ.

313. a) Rõ ràng θ là một quan hệ tương đương. Nếu $(a, b) \in \theta$, tức là $f(a) = f(b)$ thì với mọi $c \in S$ ta có

$$f(ac) = f(a) f(c) = f(b) f(c) = f(bc),$$

$$f(ca) = f(c) f(a) = f(c) f(b) = f(cb),$$

do đó $(ac, bc) \in \theta$, $(ca, cb) \in \theta$.

b) Ánh xạ $g : S/\theta \to T$ đặt tương ứng mỗi lớp tương đương theo θ của a với phần tử $f(a) \in T$ là một đẳng cấu và rõ ràng $g\theta^* = f$.

314. b) Chẳng hạn ta chứng minh cho tính chất giao hoán. Ký hiệu $\theta(x)$ là lớp tương đương theo θ chứa x. Thế thì $\theta(x)\,\theta(y) = \theta(xy)$. Mặt khác $\theta = \rho \wedge \sigma$, và ρ, σ là các tương đẳng mà S/ρ và S/σ giao hoán nên ta có

$$\rho(xy) = \rho(x)\,\rho(y) = \rho(y)\,\rho(x) = \rho(yx),$$

$$\sigma(xy) = \sigma(x)\,\sigma(y) = \sigma(y)\,\sigma(x) = \sigma(yx),$$

$$\theta(xy) = \rho(xy) \wedge \sigma(xy) = \rho(yx) \wedge \sigma(yx) = \theta(yx).$$

Vậy $\theta(x)\,\theta(y) = \theta(y)\,\theta(x)$, nghĩa là S/θ giao hoán.

Đối với các tính chất lũy đẳng và giản ước được cũng chứng minh tương tự.

c) Rõ ràng $(\rho \cup \sigma)^t$ là một tương đẳng trên S chứa ρ và σ. Mặt khác nếu θ là một tương đẳng trên S chứa ρ và σ thì θ chứa $(\rho \cup \sigma)^n$ với mọi $n = 1, 2, \ldots$, do đó chứa $(\rho \cup \sigma)^t$.

315. a) Rõ ràng $\mathcal{R}_H$ là một quan hệ tương đương trên S. Giả sử $(a, b) \in \mathcal{R}_H$. Thế thì với mọi $x \in S$ ta có $ax \in H$

chỉ và chỉ khi $bx \in H$. Do đó với mỗi $c \in S$ ta có $acx \in H$ chỉ và chỉ khi $bcx \in H$ với mọi $x \in S$, nghĩa là $(ac, bc) \in \mathcal{R}_H$. Vậy $\mathcal{R}_H$ là một tương đẳng phải trên S.

b) Nếu $Ha = Hb$ và x là một phần tử thuộc S sao cho $ax \in H$. Thế thì

$$H = Hax = Hbx.$$

Do đó $bx \in H$. Do đối xứng, ta có $(a, b) \in \mathcal{R}_H$. Đảo lại, giả sử $(a, b) \in \mathcal{R}_H$, và $x \in S$ sao cho $ax \in H$. Thế thì

$$ax = h_1 \in H, \quad bx = h_2 \in H,$$

do đó

$$a = h_1x^{-1}, \quad b = h_2x^{-1},$$

$$Ha = Hh_1x^{-1} = Hx^{-1} = Hh_2x^{-1} = Hb.$$

c) Rõ ràng W_H là một lớp tương đương theo tương đẳng $\mathcal{R}_H$. Ta chứng minh W_H là một iđêan phải của S. Giả sử $a \in W_H$, $x \in S$. Nếu $(ax)s \in H$ thì mâu thuẫn với giả thiết $a \in W_H$, vì $(ax)s = a(xs) \in H$. Vì vậy $(ax)s \notin H$ với mọi $s \in S$, tức là $ax \in W_H$.

d) Giả sử $(a, b) \in \rho$, và $ax \in H$. Vì ρ là một tương đẳng phải trên S, nên $(ax, bx) \in \rho$, và vì H là một lớp tương đương theo ρ, nên $bx \in H$. Tương tự $bx \in H$ kéo theo $ax \in H$, tức là $(a, b) \in \mathcal{R}_H$.

316. a) $(a, b) \in \mathcal{R}_H$ khi và chỉ khi

$$ax = h \Leftrightarrow bx = h, \text{ với mọi } x \in S.$$

Vậy tập các số nguyên dương không chia hết h lập thành một lớp tương đương, còn mỗi ước của h lập thành một lớp tương đương. Vậy $|S/\mathcal{R}_H| = 1 +$ số các ước của h.

b) W_H chính là tập các số nguyên dương a mà $ax \neq h$ với mọi $x \in S$. Vậy W_H là tập các số nguyên dương không chia hết h.

317. a) Dễ thấy rằng $\mathcal{P}_H$ là một quan hệ tương đương trên S. Giả sử $(a, b) \in \mathcal{P}_H$. Thế thì $xay \in H$ khi và chỉ khi $xby \in H$. Do đó với $c, d \in S$ ta có $xcady = (xc)a \times (dy) \in H$ khi và chỉ khi $xcbdy = (xc)b(dy) \in H$ với mọi $x, y \in S$, tức là $(cad, cbd) \in \mathcal{P}_H$. Vậy $\mathcal{P}_H$ là một tương đẳng trên S.

b) Giả sử $s \in W$, $a \in S$. Nếu $x(as)y \notin H$ thì $xa(sy) \in H$, trái giả thiết $a \in W$. Vậy $x(as)y \in H$ với mọi $x, y \in S$, tức là $as \in W$. Tương tự $sa \in W$, và W là một iđêan hai phía của S.

318. a) Nếu a chính quy thì tồn tại $x \in S$ để $axa = a$. Thế thì $e = ax$ là một lũy đẳng của S và ta có $ea = axa = a$. Do đó $aS \cup \{a\} = eS \cup \{e\}$. Đảo lại giả sử $e^2 = e$ và $aS \cup \{a\} = eS \cup \{e\}$. Thế thì $a = ex$ với x nào đó thuộc S, hoặc $a = e$. Do đó nếu $a = e$ thì $a = aaa$, còn nếu $a = ex$ thì $ea = e^2x = ex = a$. Mặt khác $e = ay$ với y nào đó thuộc S. Vì vậy

$$a = ea = aya,$$

nghĩa là a là phần tử chính quy.

b) Nếu $a = axa$, $x \in S$, thì ta lấy $b = xax$.

Lúc đó ta có

$$aba = a(xax)a = (axa)xa = axa = a,$$

$$bab = (xax)(xax) = x(axa)(xax) =$$

$$= xa(xax) = x(axa)x = xax = b.$$

319. a) $(x_1, y_1)(x_2, y_2)(x_1, y_1) = (x_1, y_2)(x_1, y_1) =$

$$= (x_1, y_1).$$

Vậy mọi phần tử $(x_1, y_1) \in S$ đều là phần tử chính quy.

b) Tương tự câu a) ta lại có

$$(x_2, y_2)(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_2, y_2).$$

Vậy (x_1, y_1) và (x_2, y_2) ngược nhau.